Momento de Inercia y Momento Angular

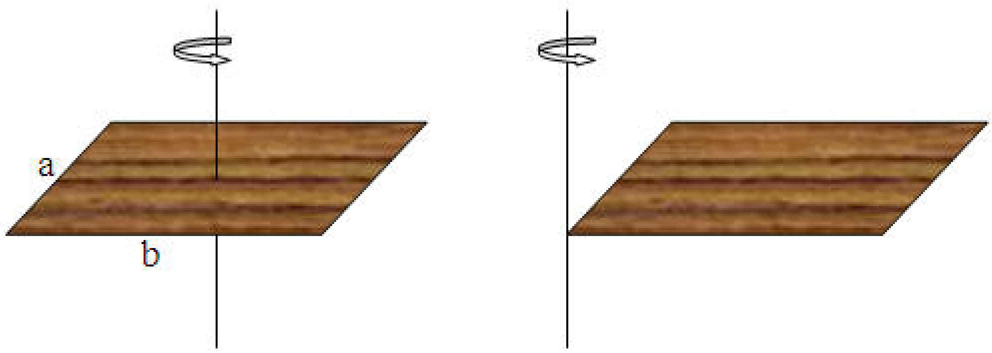
Ecuaciones de interés:

Movimiento circular:	Momento de Inercia (en todos los casos se considera que la masa se distribuye uniformemente):
$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$ $\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T}$ $a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$ $\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$ $\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\theta$ $a = \alpha R$	Objeto simétrico con radio de giro R_G: $I_{CM} = mR_G^2$ Aro, o cilindro hueco, o masa puntual: $I_{CM} = mR^2$ Disco o cilindro (que giran respecto a un eje que pasa por el centro y es perpendicular al corte transversal): $I_{CM} = mR^2/2$ Varilla de largo L que gira respecto a su centro: $I_{CM} = mL^2/12$ Esfera sólida: $I_{CM} = 2mR^2/5$ Esfera hueca: $I_{CM} = 2mR^2/3$ Teorema de los ejes paralelos: $I = I_{CM} + md^2$ (siendo d la distancia entre el centro de masa y el punto en donde gira el objeto) Energía cinética de rotación: $K_R = I\omega^2/2$

1.- Un joven está sentado en su silla giratoria, frente al computador, y en un momento se da un impulso y comienza a girar con cierta velocidad angular. Si luego quiere aumentar la rapidez con que gira, ¿qué le es más conveniente, sin que nadie más que él intervenga?

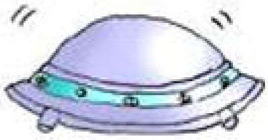
2.- Una persona ata una piedra de masa m a un cordel de largo L. Si hace girar la piedra, en un plano horizontal, con cierta velocidad angular. Asumiendo que el cordel tiene una masa que se puede despreciar. Si la masa de la piedra se duplica, el largo de la cuerda disminuye a la mitad y la velocidad angular se duplica, ¿cómo son el momento de inercia, el momento angular y la energía cinética de rotación de la piedra, respecto a los valores que tenían antes de los cambios?

3.- Se tiene una tabla rectangular, de lados a = 0,2 m y b = 0,4 m, de masa 0,6 kg. Si gira respecto a un eje perpendicular al plano de la tabla y que pasa por su centro de masa (intersección de sus diagonales) con una velocidad angular de 10 rad/s. i) Determine su momento angular. ($I_{CM} = m(a^2 + b^2)/12$). ii) Si luego se le hace girar en otro eje, en un vértice de la tabla, que también es perpendicular al plano de la tabla, ¿cuál será su nuevo momento angular?

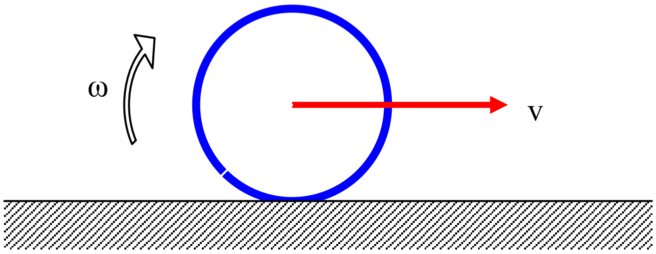


4.- Se tiene una rueda y un disco, ambos de igual radio e igual masa. Si se hace girar a ambos respecto al centro, ¿cuál ofrece mayor facilidad para empezar a moverlo? Y ¿a cuál es más difícil detenerlo una vez que ambos tienen la misma velocidad?

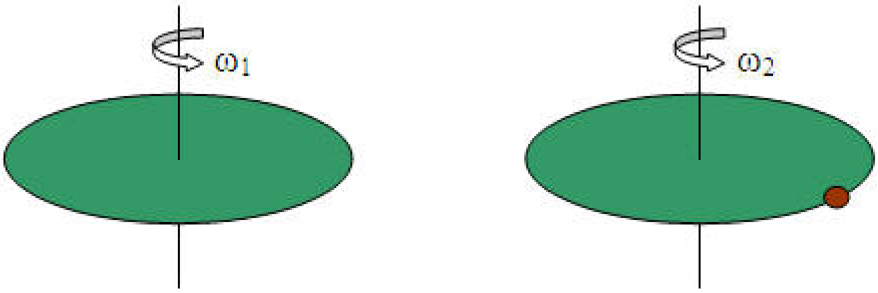
5.- Si te contrataran para asesorar a un grupo de constructores de una nave espacial que tendrá forma circular, y sabiendo que el mayor gasto de combustible que tendrá será para empezar a hacerla girar y posteriormente para detener su movimiento rotatorio, ¿qué aconsejarías: que tenga forma de rueda o forma de disco y por qué?



6.- Una rueda de masa m y radio de giro R rueda con una velocidad angular ω. Si gira en un plano horizontal, ¿cuál es su energía cinética total?



7.- Un disco de cartón de masa 50 g y 20 cm de radio, gira horizontalmente respecto a su centro con una rapidez angular de 5 rad/s. Si sobre el disco cae una moneda de $ 100,-, cuya masa se puede aproximar a 10 g, en el borde externo del disco, y el sistema nuevo queda girando, ¿con qué rapidez angular lo hace?, ¿qué rapidez lineal tiene la moneda?



8.- Una esfera hueca de masa 2 kg tiene un radio de 30 cm y tiene una energía cinética de rotación de 6 J. Si recibe un impulso y su rapidez angular se duplica. ¿Cómo se modifica: a) su momento angular, b) su energía cinética de rotación?

9.- Un tagadá es una de las entretenciones que suele haber en un parque de diversiones. Y es, básicamente, un disco plano que gira en torno a un eje perpendicular al plano y que pasa por su centro; también tiene otros movimientos, pero para lo que se propondrá solo se hará la suposición que tiene un movimiento horizontal.

Suponga que el tagadá de la figura tiene un diámetro de 5 m. La masa del disco uniforme es de 500 kg, la masa de cada persona arriba de él es, en promedio, 60 kg y hay 20 en total. Las personas están en el borde del disco. El sistema completo se mueve a razón de 2 vueltas en 10 segundos. ¿Cómo se modificaría la velocidad del tagadá si 5 personas, simultáneamente, caminan y se ubican en el centro del disco?

10.- Una esfera sólida tiene un radio de 40 cm. ¿Cuánto mide el radio de giro de la esfera? ¿Y si fuera hueca?

11.- Una rueda de 6 kg de masa y radio de giro igual a 40 cm está rodando a 300 rpm. Determine su energía cinética rotacional.

12.- Una esfera sólida de 500 g y 7 cm de radio gira a 30 rps a través de un eje que pasa por su centro. Determine su momento angular.

13.- Una hélice de avión tiene una masa de 70 kg y un radio de giro de 75 cm. Determine su momento de inercia.

14.- Un disco tiene una masa de 6,5 kg y un diámetro de 80 cm. Determine el momento de inercia del disco si gira en un eje perpendicular al plano del disco situado a 22 cm del centro del disco.

15.- Un enorme rodillo en forma de cilindro, de esos que se usan para emparejar o apisonar terrenos, tiene 1,8 m de diámetro y una masa de 10.000 kg. Determine su momento de inercia. Si cuando se opera con él gira a razón de una vuelta en cinco segundos, determine el momento angular del cilindro y la energía cinética de rotación que tiene.

16.- Un hombre se encuentra colocado sobre una plataforma con libertad de girar. Con sus brazos extendidos su rapidez de giro es de 0,25 rps, pero cuando contrae sus brazos hacia él, su rapidez es de 0,8 rps. Encuentre la relación entre el momento de inercia en el primer caso respecto al segundo.

17.- Un disco con momento de inercia I_1 gira con una rapidez angular ω_1. En un momento se deja caer, sobre el primer disco, un segundo disco, que no gira, con momento de inercia I_2. Los dos quedan girando después, como una unidad. Determine la rapidez angular final del sistema.

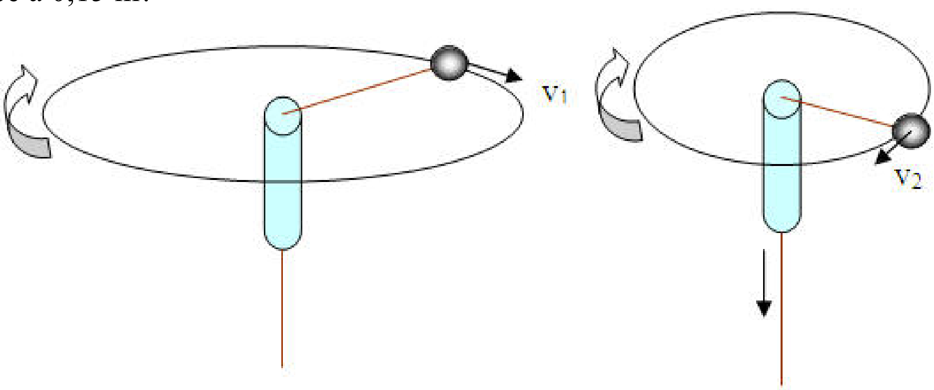
18.- Un disco con momento de inercia I = 0,015 kgm^2 está girando a 3 rps. Se deja escurrir un hilo de arena dentro del disco a una distancia de 20 cm del eje, con lo cual se forma un anillo de 20 cm de radio de arena sobre él. ¿Qué tanta arena se dejó caer sobre el disco para que su rapidez haya disminuido a 2 rps?

19.- Una rueda de 8 kg tiene un radio de giro de 25 cm. Determine su momento de inercia.

20.- Determine la energía cinética rotacional de una rueda de 25 kg que se encuentra rotando a 6 rps, si su radio de giro es de 22 cm.

21.- Un disco sólido de 20 kg rueda sobre una superficie horizontal a razón de 4 m/s. Determine su energía cinética total.

22.- Se hace girar, en círculo horizontal, una pequeña pelota atada al extremo de una cuerda que pasa a través de un tubo que está vertical. Si se tira de la cuerda a través del tubo hacia abajo, ¿qué ocurre con la rapidez de la pelota? Si la pelota está inicialmente girando a razón de 2,8 m/s describiendo una circunferencia de radio 0,3 m, ¿cuál será la rapidez tangencial de la pelota si se tira la cuerda hasta que el radio de la circunferencia se reduce a 0,15 m?



23.- Un aro cilíndrico y una esfera sólida, ambos de radio y masa iguales, se dejan caer al mismo tiempo desde la parte superior de un plano inclinado. ¿Cuál de los dos objetos llega primero al final del plano?

24.- Considerando órbitas circulares. ¿Cuál es mayor, y en qué factor, la energía cinética de la Tierra debida a su rotación, o la que se debe a su traslación alrededor del Sol? (masa de la Tierra = $5{,}98 \times 10^{24}$ kg, radio de la Tierra = 6.370 km, distancia entre la Tierra y el Sol = $1{,}5 \times 10^{11}$ m)

25.- Un patinador sobre hielo hace un giro rápido flexionando los brazos, y una bailarina hace una pirueta con los brazos sobre la cabeza. ¿Por qué se coloca los brazos en esa posición en ambos casos?

26.- Una estrella esférica en rotación expande su volumen normal en su ciclo de vida. Suponiendo que su masa permanece constante, ¿cómo es afectado el periodo de rotación? ¿Y su energía cinética de rotación?

Fuente:
1.- Del 11 al 21. Física General, Frederick Bueche, Ed. Mc Graw Hill, Tercera edición.
2.- Del 22 al 26. Física, Jerry Wilson, Ed. Pearson, Segunda Edición

Soluciones

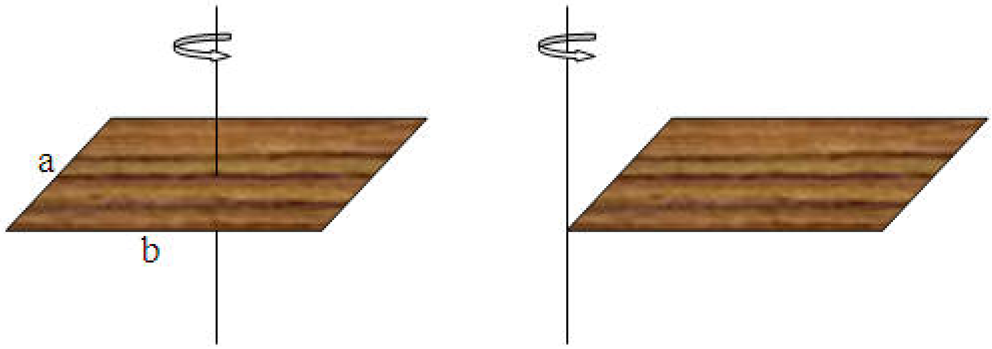
1.- Como ha de saberse, cantidad de momento angular se conserva en un sistema. Y como además se sabe que el momento angular se determina con el producto entre el momento de inercia y la rapidez angular que posee un objeto, es decir, son cantidades inversamente proporcionales, entonces si se quiere que el joven aumente la rapidez con que gira, debe disminuir su momento de inercia, y ello se consigue acortando el radio de giro. Por lo tanto algo aconsejable sería, por ejemplo, que encogiera sus brazos.

2.- Datos:
$m_1 = m$
$R_1 = R$
$\omega_1 = \omega$
$m_2 = 2m$
$R_2 = R/2$
$\omega_2 = 2\omega$

$I_1 = m_1R_1^2 = mR^2$
$L_1 = I_1\omega_1 = mR^2\omega$
$K_1 = I_1\omega^2/2 = mR^2\omega^2/2$

$I_2 = m_2R_2^2 = 2m \text{ x } (R/2)^2 = 2mR^2/4 = mR^2/2 = (mR^2)/2 = I_1/2$, es decir, el momento de inercia disminuye a la mitad.
$L_2 = I_2\omega_2 = mR^2/2 \text{ x } 2\omega = 2mR^2\omega/2 = mR^2\omega$, es decir, el momento angular continua igual.
$K_2 = I_2\omega^2/2 = [mR^2/2 \text{ x } (2\omega)^2] / 2 = 4mR^2\omega^2 / 2 = 2(mR^2\omega^2/2) = 2K_1$, es decir, la energía cinética de rotación se duplica.

3.-



Datos:
$m = 0,6$ kg
$a = 0,2$ m
$b = 0,4$ m

i) $I_{CM} = m(a^2 + b^2)/12$
$I_{CM} = 0,6 \text{ kg x } [(0,2 \text{ m})^2 + (0,4 \text{ m})^2] / 12 = 0,01 \text{ kgm}^2$

ii) Aplicando el teorema de los ejes paralelos, se tendrá: $I = I_{CM} + md^2$
d es la distancia entre el centro del rectángulo y un vértice, por lo tanto es la mitad de la diagonal, y la diagonal se calcula con el teorema de Pitágoras.

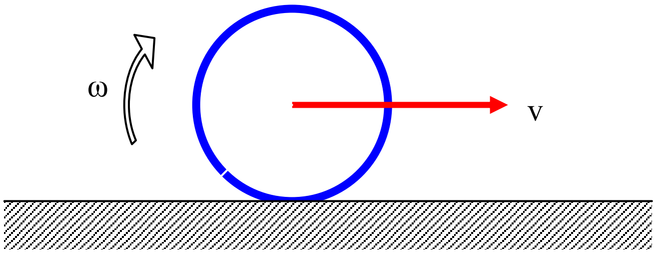
$$d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \frac{\sqrt{(0{,}2m)^2 + (0{,}4m)^2}}{2} = 0{,}224m$$

$$I = 0{,}01 \text{ kgm}^2 + 0{,}6 \text{ kg x } (0{,}224 \text{ m})^2 = 0{,}01 \text{ kgm}^2 + 0{,}03 \text{ kgm}^2 = 0{,}04 \text{ kgm}^2$$

4.- El más fácil para empezar a mover es aquel objeto con menor momento de inercia, es decir el disco. Y el más difícil de detener es aquél que sea más difícil de modificar su movimiento, y sería el de mayor momento de inercia, es decir, la rueda.

5.- Que tenga forma de disco, ya que así tendrá menor momento de inercia.

6.-

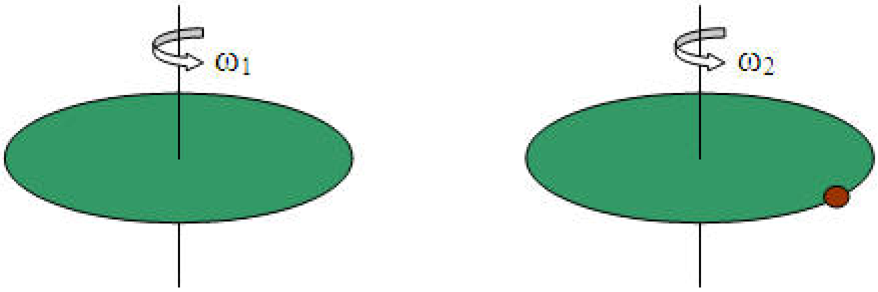


$K_T = mv^2/2$
$K_R = I\omega^2/2$
$I = mR^2$
$v = \omega R \Rightarrow \omega = v/R$

$K = K_T + K_R$

$K = mv^2/2 + I\omega^2/2 = mv^2/2 + mR^2(v/R)^2/2 = mv^2/2 + mR^2v^2/2R^2 = mv^2/2 + mv^2/2 = mv^2$

7.-



Datos:
$m = 50$ g = 0,05 kg
$R = 20$ cm = 0,2 m
$\omega_1 = 5$ rad/s
$m_1 = 10$ g = 0,01 kg

Hay que considerar que primero el disco gira solo, por lo tanto su momento angular es solo mR^2, pero luego se le coloca una moneda en el borde y el sistema sigue girando. En este caso la moneda respecto al sistema es una masa puntual con momento de inercia m_1R^2, el mismo radio del disco, por lo tanto, en el segundo momento el momento de inercia es el del disco más el de la moneda, ambos con la misma velocidad angular.

$$L_i = L_f$$

$$I_{disco}\omega_1/2 = (I_{disco} + I_{moneda})\omega_2$$
$$mR^2\omega_1/2 = (mR^2/2 + m_1R^2)\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{\frac{mR^2\omega 1}{2}}{\frac{mR^2}{2} + m_1R^2} = \frac{\frac{0{,}05kgx(0{,}2m)^2 x5\frac{rad}{s}}{2}}{\frac{0{,}05kgx(0{,}2m)^2}{2} + 0{,}01kgx(0{,}2m)^2} = \frac{5x10^{-3}\frac{kgm^2rad}{s}}{1{,}4x10^{-3}kgm^2} = 3{,}57\frac{rad}{s}$$

8.- Datos:
m = 2 kg
R = 30 cm = 0,3 m
K_{R1} = 6 J
$\omega_1 = \omega$
$\omega_2 = 2\omega$

a) $L_1 = I\omega_1 = I\omega$
$L_2 = I\omega_2 = I \times 2\omega = 2 I\omega = 2 L_1$

Es decir, el momento angular se duplica.

b) $K_{R1} = I\omega_1^2/2$
$K_{R2} = I\omega_2^2/2 = I \times (2\omega)^2 /2 = 4 I\omega^2 / 2 = 4 (I\omega_1^2/2) = 4K_{R2}$
Es decir, la energía cinética de traslación se cuadruplica.

9.- Datos:
Masa disco: m_1 = 500 kg
R = 2,5 m

Masa personas, al inicio: m_2 = 20 x 60 kg = 1.200 kg

ω_1 = 2 rps = 2 x 2π rad/s = 12,56 rad/s

Por conservación del momento angular, se tiene:

$$L_1 = L_2$$
$$(I_{disco} + I_{personas1})\omega_1 = (I_{disco} + I_{personas2})\omega_2$$

A las personas se les puede resumir como un anillo de radio R, debido a que se distribuyen en el borde del disco.

En segunda instancia las 5 personas que van al centro tendrán un radio 0 m, por lo tanto no influirán, pero sí lo harán las 15 personas que quedan en el borde.
Masa personas, al final: m_3 = 15 x 60 kg = 900 kg

$$(m_1R^2 + m_2R^2/2)\omega_1 = (m_1R^2 + m_3R^2/2)\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{\left(m_1R^2 + \frac{m_2R^2}{2}\right)\omega_1}{m_1R^2 + \frac{m3R^2}{2}} = \frac{\left(500kgx(2{,}5m)^2 + \frac{1.200kgx(2{,}5m)^2}{2}\right)12{,}56\frac{rad}{s}}{500kgx(2{,}5m)^2 + \frac{900kgx(2{,}5m)^2}{2}}$$

$$\omega_2 = 14{,}54 \frac{rad}{s}$$

10.- Datos:
R = 40 cm = 0,4 m

Si es sólida.

$I_{CM} = 2mR^2/5$
$I_{CM} = mR_G^2$

$$mR_G^2 = 2mR^2/5$$
$$R_G = \sqrt{\frac{2R^2}{5}} = \sqrt{\frac{2x(0{,}4m)^2}{5}}$$
$$R_G = 0{,}25 \text{ m}$$

Si es hueca:

$I_{CM} = 2mR^2/3$

$$mR_G^2 = 2mR^2/3$$
$$R_G = \sqrt{\frac{2R^2}{3}} = \sqrt{\frac{2x(0{,}4m)^2}{3}}$$
$$R_G = 0{,}33 \text{ m}$$

11.- Datos:
m = 6 kg
R_G = 40 cm = 0,4 m
ω = 300 rpm = 31,4 rad/s

$K = I\omega^2/2$
$K = mR_G^2\omega^2/2$ = 6 kg x $(0{,}4\text{ m})^2$ x $(31{,}4\text{ rad/s})^2$ / 2 = 473,3 J

12.- Datos:
m = 500 g = 0,5 kg
R = 7 cm = 0,07 m
ω = 30 rps = 188,4 rad/s

L = Iω
$L = 2mR^2/5$ x ω = $2mR^2\omega/5$ = 2 x 0,5 kg x $(0{,}07\text{ m})^2$ x 188,4 rad/s / 5 = 0,46 kgm^2/s

13.- Datos:
m = 70 kg
R_G = 75 cm = 0,75 m

$I = mR_G^2$ = 70 kg x $(0{,}75\text{ m})^2$ = 39,375 kgm^2

14.- Datos:
$m = 6,5$ kg
$R = 40$ cm $= 0,4$ m
$d = 22$ cm $= 0,22$ m

$I = I_{CM} + md^2$
$I = mR^2/2 + md^2 = 6,5 \text{ kg} \times (0,4 \text{ m})^2/2 + 6,5 \text{ kg} \times (0,22 \text{ m})^2 = 0,835 \text{ kgm}^2$

15.- Datos:
$m = 10.000$ kg
$R = 0,9$ m
$v = 5$ rps $= 31,4$ rad/s

$I = mR^2/2$
$I = 10.000 \text{ kg} \times (0,9 \text{ m})^2 / 2 = 4.050 \text{ kgm}^2$

$L = I\omega$
$L = 4.050 \text{ kgm}^2 \times 31,4 \text{ rad/s} = 127.170 \text{ kgm}^2/\text{s}$

$K = I\omega^2/2$
$K = 4.050 \text{ kgm}^2 \times (31,4 \text{ rad/s})^2 / 2 = 1.996.569 \text{ J} = 2\times10^6 \text{ J}$

16.- Datos:
$\omega_1 = 0,25$ rps
$\omega_2 = 0,8$ rps

$L_1 = L_2$
$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

$I_1/I_2 = \omega_2/\omega_1 \Rightarrow I_1/I_2 = 0,8 \text{ rps} / 0,25 \text{ rps} = 3,2 \Rightarrow I_1 = 3,2\, I_2$

17.- $L_i = L_f$
$I_1\omega_1 = (I_1 + I_2)\omega_2$
$$\omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_1 + I_2}$$

18.- Datos:
$I = 0,015 \text{ kgm}^2$
$\omega_i = 3$ rps $= 18,84$ rad/s

$R = 20$ cm $= 0,2$ m
$\omega_f = 2$ rps $= 12,56$ rad/s

$L_i = L_f$
$I\omega_i = (I + mR^2)\omega_f$
$$m = \frac{I(\omega_i - \omega_2)}{R^2\omega_f} = \frac{0,015kgm^2(18,84\frac{rad}{s} - 12,56\frac{rad}{s})}{(0,2m)^2 x 12,56\frac{rad}{s}} = 0,1875kg$$

19.- Datos:
$m = 9$ kg
$R_G = 25$ cm $= 0{,}25$ m

$I = mR_G^2$
$I = 9$ kg x $(0{,}25\ m)^2 = 0{,}5625\ kgm^2$

20.- Datos:
$m = 25$ kg
$\omega = 6$ rps $= 37{,}68$ rad/s
$R_G = 22$ cm $= 0{,}22$ m

$K = I\omega^2/2$
$K = mR_G^2\omega^2/2 = 25\ kg \times (0{,}22\ m)^2 \times (37{,}68\ rad/s)^2 / 2 = 859\ J$

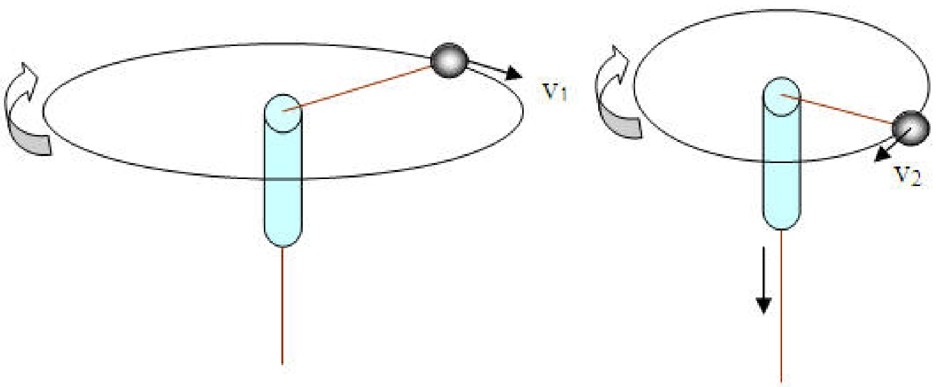
21.- Datos:
$m = 20$ kg
$v = 4$ m/s

$K = K_T + K_R$
$K = mv^2/2 + I\omega^2/2$

$I = mR^2/2$
$v = \omega R \Rightarrow \omega = v/R$

$K = mv^2/2 + (mR^2/2)(v/R)^2/2$
$K = mv^2/2 + mv^2/4 = 3mv^2/4 = 3 \times 20\ kg \times (4\ m/s) / 4 = 240\ J$

22.-



Datos:
$v_1 = 2{,}8$ m/s
$R_1 = 0{,}3$ m
$R_2 = 0{,}15$ m

$v = \omega R \Rightarrow \omega = v/R$

$L_1 = L_2$
$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$
$mR_1^2v_1/R_1 = mR_2^2v_2/R_2$

$$v_2 = \frac{\frac{R_1^2 v_1 R_2}{R_1}}{R_2^2} = \frac{R_1^2 v_1 R_2}{R_1 R_2^2} = \frac{R_1 v_1}{R_2} = \frac{0{,}3m x 2{,}8\frac{m}{s}}{0{,}15m} = 5{,}6\frac{m}{s}$$

23.- Llega primero aquel que alcance más pronto una mayor rapidez, y ese será quien tenga menor momento de inercia, es decir: la esfera.

24.- Datos:
m = $5{,}98x10^{24}$ kg
R_T = 6.370 km = $6{,}37x10^6$ m
R_{TS} = $1{,}5x10^{11}$ m

Respecto a la rotación, se considera a la Tierra como una esfera sólida.
$I_{Rot} = 2mR^2/5$
I_{Rot} = 2 x $5{,}98x10^{24}$ kg x $(6{,}37x10^6\ m)^2$ / 5 = $9{,}7x10^{37}$ kgm^2

Respecto a la traslación, se considera a la Tierra como una masa puntual.
$I_{Tras} = mR^2$
I_{Tras} = $5{,}98x10^{24}$ kg x $(1{,}5x10^{11}\ m)^2$ = $1{,}35x10^{47}$ kgm^2

$\omega = 2\pi/T$

Rotación:
T = 24 horas = 86.400 s
ω_{Rot} = 2 x 3,14 / 86.400 = $7{,}27x10^{-5}$ rad/s

Traslación:
T = 365 días = $3{,}15x10^7$ s
ω_{Tras} = 2 x 3,14 / $3{,}15x10^7$ s = $2x10^{-7}$ rad/s

Rotación:
$K_{Rot} = I_{Rot}\omega_{Rot}^2$ / 2 = $9{,}7x10^{37}$ kgm^2 x $(7{,}27x10^{-5}\ rad/s)^2$ / 2 = $2{,}56x10^{29}$ J

Traslación:
$K_{Tras} = I_{Tras}\omega_{Tras}^2$ / 2 = $1{,}35x10^{47}$ kgm^2 x $(2x10^{-7}\ rad/s)^2$ / 2 = $2{,}7x10^{33}$ J

Comparación:

K_{Tras} / K_{Rot} = $2{,}7x10^{33}$ J / $2{,}56x10^{29}$ J = 10.547

Es decir, la energía cinética de la rotación de la Tierra respecto al Sol es 10.547 veces mayor que la energía cinética de rotación de la Tierra respecto a sí misma.

25.- Para disminuir la medida del radio de giro y, en consecuencia, disminuir su momento de inercia, y como el momento de inercia y la rapidez angular son cantidades inversamente proporcionales, al disminuir el momento de inercia … aumenta la rapidez de giro.

26.- Si la estrella se expande, supongamos que la masa se redistribuye uniformemente, su radio aumentará, con ello aumentará su momento de inercia. Entonces se moverá más lento (debido a la conservación del momento angular que significa, entre otras cosas, que el momento de inercia y la rapidez angular son cantidades inversamente proporcionales), por lo que su periodo aumentará. Y, la energía cinética de rotación disminuirá.