Guía de Relatividad - Soluciones

1.- ¿Qué es el espacio-tiempo?

Es el lugar geométrico donde ocurren los fenómenos físicos. Pero ha de considerarse que ese lugar geométrico está localizado en el tiempo. Es un sistema de cuatro dimensiones, tres espaciales y una temporal.

2.- ¿Puedes viajar mientras permaneces en un solo lugar del espacio?

Si, por supuesto. Todo dependerá del sistema de referencia que se emplee. En estos momentos, por ejemplo, cuando estás leyendo esta respuesta… estás viajando con la Tierra alrededor del Sol. O con el Sistema Solar alrededor de la galaxia Vía Lácteas. Y bueno, puede haber muchos ejemplos más.

3.- ¿Viaja la luz por el espacio? ¿Y por el tiempo? ¿Viaja por ambos?

La luz viaja por el espacio. Si se considera que la luz es una onda electromagnética o un fotón (según la teoría que se quiera utilizar), ella viaja para ir de un lugar a otro, por ejemplo ... del Sol a la Tierra.

Viaja por el tiempo. Depende lo que consideremos como "viajar por el tiempo", si ello significa que no ocurre que la luz en un momento está en un lugar y luego está en otro sin que entre ambos eventos transcurra tiempo, entonces sí, viaja por el tiempo. Una idea podría ser… la luz que hoy percibimos de una estrella muy lejana, corresponde a una luz que se originó hace mucho tiempo y ha estado viajando a través del tiempo para llegar ahora a ser visible por nosotros.

4.- ¿Qué es la dilatación del tiempo?

Es una consecuencia de la Teoría de la Relatividad, y significa que el tiempo que transcurre para un objeto que se mueve con cierta velocidad, respecto a un sistema de referencia inercial, transcurre más lentamente.

5.- ¿Qué queremos decir cuando afirmamos que el movimiento es relativo?

Significa que la descripción de un movimiento depende del sistema de referencia que se emplee. Un pasajero en un bus puede estar moviéndose respecto a la calle, que se puede considerar en reposo, pero no se mueve respecto a otro pasajero del mismo bus que va sentado junto a él.

6.- La rapidez de una pelota en el momento que la atrapas cuando es lanzada desde un camión en movimiento depende de la rapidez y la dirección del camión. ¿Depende de manera similar la rapidez de la luz que llega de una fuente en movimiento de la rapidez y la dirección de la fuente?

No. La rapidez de la luz es la misma en cualquier sistema de referencia. Constituye uno de los pilares de la Teoría de la Relatividad.

7.- ¿Qué queremos decir cuando afirmamos que la rapidez de la luz es una constante?

Significa que un medio homogéneo determinado el valor que tiene no se modifica.

8.- Si observamos el paso de una nave espacial y vemos que el tiempo de sus habitantes transcurre con lentitud, ¿cómo ven ellos que transcurre nuestro tiempo?

Bueno, para ellos nosotros somos los que nos movemos, por lo tanto ellos dirán que el tiempo nuestro es el que transcurre más lento.

9.- Explica por qué cuando observamos las estrellas en una noche despejada estamos mirando hacia el pasado.

Debido a que la luz no viaja, de un lugar a otro, de forma inmediata, tiene una velocidad finita, por lo tanto emplea tiempo en ir de un lugar a otro. La luz que salió de una estrella hace cierto tiempo y que vemos ahora, es la luz que se emitió en tiempos pasados.

10.- ¿Es posible que una persona tenga una edad biológica mayor que la de sus padres?

Si, esto es una de las consecuencias del efecto conocido como "dilatación del tiempo". La paradoja de los gemelos lo explica bien. Dos personas están en la Tierra, considerada un sistema de referencia inercial, una de ellas viaja en una nave a cierto lugar en el espacio con una gran velocidad, cuando regresa el tiempo transcurrido en el sistema en reposo (la Tierra en este caso) es mayor al mismo tiempo correspondiente al transcurrido en la nave que se movió con la persona que viajó. En consecuencia la persona que quedó en Tierra envejeció más que la que estuvo viajando.

11.- ¿Cuáles dos mediciones de velocidad que hacen dos observadores en movimiento siempre concuerdan?

La de la luz. La de ellos entre sí.

12.- Una nave espacial en forma de esfera es vista por un observador sobre la Tierra con una velocidad cercana a la velocidad de la luz. ¿Qué forma ve el observador cuando pasa la nave espacial?

Se deforma en la dirección del movimiento, se "acorta". Es una consecuencia del efecto conocido como "contracción de la longitud", tendría forma de esferoide prolato.

13.- Brinde un argumento físico que muestre que es imposible acelerar un objeto de masa m a la velocidad de la luz.

Su masa aumentaría al infinito. Y eso es imposible.

14.- Algunas estrellas distantes llamadas quásares se alejan de nosotros a la mitad (o más) de la velocidad de la luz. ¿Cuál es la velocidad de la luz que recibimos de ellas?

La de la luz. La velocidad de la luz es la misma, independiente de la velocidad de quién la emita.

15.- Dos láseres situados sobre una nave espacial en movimiento se disparan simultáneamente, en la misma dirección y sentidos opuestos. Un observador sobre la nave espacial afirma que vio los pulsos de luz de manera simultánea. ¿Qué condición es necesaria de manera que concuerde un segundo observador?

Una situación es que el segundo observador se encuentre junto al primero. Pero lo interesante es: que se encuentre en una posición de la recta que pasa por el punto desde donde se originan los rayos láser y que sea perpendicular a la línea del trayecto de ellos, con la condición que el observador se mueva con la misma velocidad que la nave.

16.- Si la luz viajara a 50 km/h. ¿Qué cambios experimentaríamos? Liste algunos.

Para responder esta pregunta, por favor lea el capítulo "velocidad máxima", del libro "El país de las maravillas", de George Gamow. Lo puede descargar de www.hverdugo.cl sección "libros de matemática y física".

17.- Cuando decimos que un reloj en movimiento funciona más lentamente que uno estacionario, ¿significa que hay algo físico inusual relacionado con el reloj en movimiento?

No, nada inusual. Esto está explicado por la Teoría de la Relatividad, en el efecto "dilatación del tiempo". El tiempo transcurre más lentamente para un objeto que se mueve respecto al transcurrido en un sistema de referencia inercial.

EJERCICIOS DE RELATIVIDAD

Ecuaciones a considerar, en relatividad general y especial:

a) dilatación del tiempo: $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

b) contracción de la longitud: $\Delta l = \Delta l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

c) masa relativista: $m_m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

m_m = masa aparente
m_o = masa en reposo

d) suma de velocidades: rapidez otro móvil desde un sistema en reposo = $\dfrac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}}$

v = rapidez de una nave respecto al sistema en reposo
u = rapidez de otro móvil respecto a la nave

e) $\Delta E = \Delta m\, c^2 = (m - m_0)c^2$

A) RELATIVIDAD NEWTONIANA

1. Juan en su Corvette acelera a razón de 3i – 2j m/s^2, en tanto que Carlos en su Jaguar acelera a 1i + 3j m/s^2. Ambos parten del reposo en el origen de un sistema de coordenadas xy. Después de 5 s, a) ¿cuál es la velocidad de Juan respecto de Carlos, b) cuál es la distancia que los separa, c) cuál es la aceleración de Juan respecto a Carlos? (a) 26,9 m/s, b) 67,3 m, c) (2i – 5j) m/s^2)

a) $a_J = 3i - 2j\ m/s^2$
$a_C = i + 3j\ m/s^2$
$t = 5\ s$
$v_0 = 0\ m/s$ *(para ambos)*

$v = v_0 + at$

$v_J = 0\ m/s + (3i - 2j) \times 5\ m/s = 15i - 10j\ m/s$
$v_C = 0\ m/s + (i + 3j) \times 5\ m/s = 5i + 15j\ m/s$

$v_{JC} = v_J - v_C = (5i + 15j\ m/s) - (15i - 10j\ m/s) = -10i + 25j\ m/s$

Y, su magnitude es $|v_{JC}| = 26,923\ m/s$

b) $d_{JC} = |d_J - d_C|$

$d_J = v_0t + a_Jt^2/2 = 0 \times 5\ m + (3i - 2j) \times 5^2 / 2\ m = 37,5\ i - 25\ j\ m$
$d_C = v_0t + a_Ct^2/2 = 0 \times 5\ m + (i + 3j) \times 5^2 / 2\ m = 12,5\ i + 37,5\ m$

$d = \sqrt{(37{,}5 - 12{,}5)^2 + (-25 - 37{,}5)^2} = 67{,}3\text{m}$

c) $a_{JC} = a_J - a_C = (3i - 2j)\ m/s^2 - (i + 3j)\ m/s^2 = 2i - 5j\ m/s^2$

2. Un motociclista que viaja rumbo al oeste a 80 km/h es perseguido por un auto de policía que se desplaza a 95 km/h. ¿Cuál es la velocidad de a) el motociclista respecto del auto del policía, b) la de éste respecto al motociclista?

a) $v = v_M - v_P = 80\ km/h - 95\ km/h = -15\ km/h$
b) $v = v_P - v_M = 95\ km/h - 80\ km/h = 15\ km/h$

3. Un río tiene una velocidad estable de 0,5 m/s. Un estudiante nada aguas arriba una distancia de 1 km y regresa al punto de partida. Si el estudiante puede nadar a una velocidad de 1,2 m/s en agua sin corriente, ¿cuánto tiempo dura su recorrido? Compare éste con el tiempo que duraría el recorrido si el agua estuviera quieta. ($2{,}02\text{x}10^3$s, 21% más largo)

Hacia arriba: $v_1 = v_N - v_R = 1{,}2\ m/s - 0{,}5\ m/s = 0{,}7\ m/s$

Y, recorriendo 1 km = 1.000 m, demorará un tiempo:

$t_1 = d/v = 1.000\ m / 0{,}7\ m/s = 1.429\ s$

Hacia abajo: $v_2 = v_N + v_R = 1{,}2\ m/s + 0{,}5\ m/s = 1{,}7\ m/s$

Recorriendo 1 km = 1.000 m, demorará un tiempo:

$t_2 = d/v = 1.000\ m / 1{,}7\ m/s = 588\ s$

En total, tardará: $t = t_1 + t_2 = 1.429\ s + 588\ s = 2.017\ s$

Si estuviera quieta el agua, el nadador recorrería, en ir y volver, 2.000 m a 1,2 m/s

$t = 2.000\ m / 1{,}2\ m/s = 1667\ s$

Y, 2.017 s respecto a 1667 s, es 21% mayor.

4. ¿Cuánto tiempo tarda un automóvil que viaja en el carril izquierdo a 60 km/h para alcanzar a otro automóvil (que lleva ventaja) en el carril derecho que se mueve a 40 km/h, si las defensas delanteras de los autos están inicialmente separadas 100 m?

$V_I = 60\ km/h = 16{,}67\ m/s$
$V_D = 40\ km/h = 11{,}11\ m/s$

$v_{ID} = v_I - v_D = 16{,}67\ m/s - 11{,}11\ m/s = 5{,}56\ m/s$ *(esta es la velocidad relative entre ambos automóviles)*

$d = 100\ m$

$t = d/v = 100\ m / 5{,}56\ m/s = 17{,}99\ s$

5. Cuando el Sol está directamente arriba, un cóndor se mueve hacia el suelo a una velocidad de 5 m/s. Si la dirección de su movimiento está a un ángulo de 60º debajo de la horizontal, calcule la velocidad de su sombra que se mueve a lo largo del suelo. (2,5 m/s)

Hay que calcular la velocidad horizontal. Es decir $v = v\cos\alpha$

$v = 5\ (m/s) \times \cos 60^\circ = 2{,}5\ m/s$

B) RELATIVIDAD GENERAL Y ESPECIAL

6. ¿Cuáles dos mediciones de velocidad que hacen dos observadores en movimiento relativo siempre concuerdan?

La de la luz. La de ellos entre sí.

7. Una nave espacial en forma de esfera es vista por un observador sobre la Tierra con una velocidad de 0,5c. ¿Qué forma ve el observador cuando pasa la nave espacial?

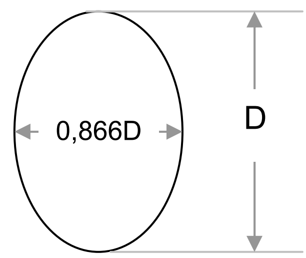
La ve en forma de esferoide prolato. Su eje mayor, diámetro de la nave en el eje perpendicular al movimiento, seguiría siendo el diámetro de la esfera cuando la nave está en reposo.

Pero su eje menor, en la dirección del movimiento, estaría sujeto al efecto de la contracción de la longitud.

Si se supone que cuando está en reposo tiene un diámetro D, cuando está en movimiento con velocidad v = 0,5c su diámetro será:

$$D_M = D\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = D\sqrt{1-\left(\frac{0{,}5c}{c}\right)} = D\sqrt{1-0{,}25} = 0{,}866D$$

Por lo tanto se tendrá una nave con las medidas de la figura:



8. Un astronauta se aleja de la Tierra a una velocidad cercana a la de la luz. Si un observador sobre la Tierra mide el tamaño y el pulso del astronauta, ¿qué cambios (si los hay) mediría el observador? ¿El astronauta mediría algunos cambios?

El astronauta a sí mismo no se vería con cambios. Para él todo transcurre en forma normal. La nave, respecto a él, no se mueve, por lo tanto no está afecto a las consecuencias de la relatividad.

En cambio desde la Tierra, si se le pudiera ver, se le vería más "flaco", suponiendo que va de pie en la nave. Habría "envejecido" menos que si se hubiera quedado en la Tierra, esto significa que su pulso sería menor. Su masa sería mayor que la que tendría en la Tierra.

9. Dos relojes idénticos están sincronizados. Uno se pone en órbita dirigido hacia el este alrededor de la Tierra mientras que el otro permanece en la misma posición inicial. ¿Cuál reloj funciona más lentamente? Cuando el reloj en movimiento regresa a la Tierra, ¿los dos siguen sincronizados?

Se mueve más lentamente el reloj que se mueve en torno a la Tierra.
Al regresar a la Tierra ambos relojes tendrían la misma "velocidad", pero no estarían sincronizados, el que quedó en la Tierra estaría más adelantado.

10. Se dice que Einstein, en sus años adolescentes, hizo la pregunta: "¿Qué vería en un espejo si lo llevara en mis manos y corriera a la velocidad de la luz?", ¿cómo respondería usted esa pregunta?

Se vería él igual que si estuviera en reposo. La velocidad de la luz es invariable, es independiente del sistema de referencia. Además, él y el espejo van en un mismo sistema de referencia inercial. Por lo tanto es como si estuviera en reposo.

11. ¿Qué sucede con la densidad de un objeto cuando aumenta su velocidad? Tome en cuenta que la densidad relativista es $m/V = E/c^2V$.

Su densidad aumenta.

Supongamos que en reposo tiene una masa m_0 y una densidad ρ_0 = m/xyz, también supongamos que se mueve en dirección x con una velocidad v.

Su masa relativista sería: $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ *y su dimensión en la dirección del movimiento sería* $x_M = x\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ *, por lo tanto, su densidad cuando está en movimiento sería:*

$$\rho_M = \frac{m}{V_M} = \frac{\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}{x_M yz} = \frac{\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}{yzx\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{m_0}{xyz} \bullet \frac{1}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)^2} = \frac{m_0}{xyz} \bullet \frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$\rho_M = \frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \bullet \rho_0$$

Y como el factor $\dfrac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ es mayor que 1, entonces **ρ_0 > ρ**

12. Respecto de marcos de referencia, ¿cómo difiere la relatividad general de la relatividad especial?

*En la relatividad especial, la luz viaja en línea recta **SIEMPRE**.*
En la relatividad general, la luz viaja en línea recta pero… ante la presencia de un campo gravitatorio .. se desvía.

Esa es la diferencia más básica.

13. Se mide un haz de partículas radiactivas cuando se dispara en un laboratorio. Se encuentra que, en promedio, cada partícula "vive" durante un tiempo de $2x10^{-8}$ s; después de este tiempo, la partícula cambia a una nueva forma. Cuando las mismas partículas estaban en reposo en el laboratorio, "vivían" en promedio $0,75x10^{-8}$ s. ¿Qué rapidez tenían las partículas en el haz?

Aquí hay que poner cuidado en la interpretación de los datos.

Como ha de saberse, el tiempo en movimiento transcurre más lento, por lo tanto, corresponde, en este caso, el tiempo propio t = $0,75x10^{-8}$ s, es el tiempo que transcurre en la nave mientras en reposo transcurren $2x10^{-8}$ s..

$t = t_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ *, y despejando adecuadamente,* $v = c\sqrt{1-\left(\frac{t}{t_0}\right)^2}$

$$v = 3x10^8\left(\frac{m}{s}\right)\sqrt{1-\left(\frac{0{,}75x10^{-8}s}{2x10^{-8}s}\right)^2} = 3x10^8\left(\frac{m}{s}\right) \bullet 0{,}927 = 2{,}78x10^8\left(\frac{m}{s}\right)$$

14. Dos gemelos tienen 25 años de edad; entonces uno de ellos sale en un viaje por el espacio a una velocidad aproximadamente constante. El gemelo que va

en el cohete espacial mide el tiempo con un reloj exacto. Cuando regresa a la Tierra, su reloj le indica que tiene 31 años, mientras que su gemelo, que se quedó en la Tierra tiene 43 años. ¿Cuál fue la velocidad del cohete?

Gemelo que queda en la Tierra: t_0 = 43 años – 25 años = 18 años
Gemelo que viaja: t = 31 años – 25 años = 6 años

Ese es, además, el tiempo que – respecto a la Tierra – estuvo viajando el otro gemelo.

$t = t_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ *, y despejando, se tiene:* $v = c\sqrt{1-\left(\frac{t}{t_0}\right)^2}$

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{6(\text{años})}{18(\text{años})}\right)^2} = c \bullet 0{,}943 = 0{,}943c$$

15. Dos células que se dividen en la Tierra cada 10 s inician desde la Tierra un viaje hasta el Sol ($1{,}5 \times 10^{11}$ m de camino) en una nave espacial que se mueve a 0,85 c. ¿Cuántas células deberían existir cuando la nave espacial se estrelle con el Sol?

Tiempo por cada división: t = 10 s
$d = 1{,}5 \times 10^{11}$ m
$v = 0{,}85c = 2{,}55 \times 10^8$ m/s

Tiempo que tarda la nave en llegar al Sol, visto desde la Tierra:
$t_0 = d/v = 1{,}5 \times 10^{11}$ m / $2{,}55 \times 10^8$ m/s = 588,235 s

$$t = t_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 588{,}235(s) \bullet \sqrt{1-\left(\frac{0{,}85c}{c}\right)^2} = 309{,}87(s)$$

Como cada 10 s hay una división, entonces hay 30,987 divisiones, pero no se puede aproximar, por lo tanto solo se consideran 30 divisiones.

Finalmente, el número de células que llegan al Sol, sería $n = 2x2^{30} = 2{,}147 \times 10^9$

16. Una cierta especie de bacterias duplican su número cada 20 días. Dos de estas bacterias son colocadas en una nave espacial y enviadas a viajar desde la Tierra por 1.000 días terrestres. Durante este tiempo, la velocidad de la nave es de 0,995 c. ¿Cuántas bacterias estarán a bordo de la nave cuando aterrice sobre la Tierra?

Tiempo para cada división: t = 20 días

t_0 = 1.000 días
v = 0,995c

$$t = t_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1.000(\text{días}) \bullet \sqrt{1-\left(\frac{0{,}995c}{c}\right)^2} = 99{,}87(\text{días})$$

Entonces, hay 99,87(días) / 20 (días) = 4,99 divisiones, es decir, solo se deben considerar 4 divisiones.´

Número de bacterias = $2x2^4$ = 32 bacterias

17. Una nave espacial está moviéndose a 0,92 c cuando la ve un observador sobre la Tierra. Esta persona y los ocupantes de la nave ponen a funcionar la alarma de sus relojes idénticos para que suenen después de que hayan pasado 6 horas. De acuerdo con los observadores de la Tierra, ¿cuánto marcará el reloj de la Tierra cuando suene la alarma del reloj de la nave?

v = 0,92c

t = 6 h
t_0 = ?

$$t = t_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\text{ , entonces, } t_0 = \frac{t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{6(h)}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}92c}{c}\right)^2}} = 15{,}31(h)$$

18. Cuando un cohete pasa en su órbita por la Tierra con rapidez v, manda un pulso de luz por delante de él. ¿Qué tan rápidamente se moverá el pulso de luz de acuerdo a una persona que se encuentre sobre la Tierra?

v = v
u = c
u' = ?

$$u' = \frac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}} = \frac{v+c}{1+\frac{vc}{c^2}} = \frac{v+c}{1+\frac{v}{c}} = \frac{c(v+c)}{c+v} = c$$

19. ¿Qué tan rápido debe moverse un objeto para que su masa aparente sea 1% mayor que su masa en reposo?

m_0 = M
m = 1,01M

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\text{, entonces: } v = c\sqrt{1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2} = c\sqrt{1-\left(\frac{M}{1{,}01M}\right)^2} = 0{,}14c$$

20. Para recrearse con \$. Si 1 g de material pudiera convertirse íntegramente en energía, ¿cuál debería ser el valor de la energía producida, si el costo por kWh es de \$ 32,-?

m = 0,001 kg

E = mc^2 = 0,001 (kg) ● ($3x10^8$ (m/s))^2 = $9x10^{13}$ (J)

Y como 1 kWh = $3{,}6x10^6$ J, se tiene

E = $2{,}5x10^7$ kWh

Y, a \$ 32,- cada kWh, se tiene

\$ = $2{,}5x10^7$ ● 32 = \$ 800.000.000,-

Y, ojo, hoy día el kWh está aproximadamente a \$ 135,-

21. Calcule la masa aparente de un electrón que viaja a la mitad de la rapidez de la luz.

m_0 = $1{,}67x10^{-27}$ kg
v = c/2

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{9{,}01x10^{-31}kg}{\sqrt{1-\left(\frac{c/2}{c}\right)^2}} = 1{,}05x10^{-30}kg$$

22. Una nave moviéndose a 0,95 c viaja desde la Tierra hasta la estrella Alfa Centauro, la cual está a 4,5 años luz. ¿Qué tan largo será el viaje para a) un reloj en la Tierra, b) un reloj en la nave?, c)¿Qué tan lejos está la Tierra de la estrella de acuerdo a los ocupantes de la nave?, d) ¿Cuál es su cálculo de rapidez que llevan?

v = 0,95c
d_0 = 4,5 años-luz = 4,5 (al)

a) $t = d/v = 4{,}5\ (al) / 0{,}95c = 4{,}737$ años $= 1{,}5x10^8$ s

b) $$t = t_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1{,}5x10^8(s)\bullet\sqrt{1-\left(\frac{0{,}95c}{c}\right)^2} = 4{,}68x10^7(s)$$

c) $$d = d_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 4{,}5(al)\bullet\sqrt{1-\left(\frac{0{,}95c}{c}\right)^2} = 1{,}405(al)$$

Como 1 (al) es la distancia que recorre la luz en un año (en el vacío),

1 (al) = 31.536.000 (s) ● $3x10^8$ (m/s) = $9{,}4608x10^{15}$ m

Entonces: d = 1,405 ● $9{,}4608x10^{15}$ m = $1{,}329x10^{16}$ m

d) $v = d/t = 1{,}329x10^{16}\ (m) / 4{,}68x10^7\ (s) = 2{,}84x10^8\ (m/s)$

23. ¿A qué velocidad tiene que moverse un reloj para funcionar a un ritmo que es la mitad del correspondiente a un reloj en reposo?

t_0 = T
t = T/2

$t = t_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$, *y despejando, se tiene:* $v = c\sqrt{1-\left(\frac{t}{t_0}\right)^2}$

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{T/2}{T}\right)^2} = 0{,}866c$$

24. En 1962, cuando Scott Carpenter orbitó la Tierra 22 veces, la prensa señaló que por cada órbita el envejecía $2x10^{-6}$ s menos que lo que hubiera envejecido al permanecer en la Tierra. a) Suponiendo que estaba alejado 160 km de la Tierra en una órbita circular, determine la diferencia de tiempo entre alguien en la Tierra y Carpenter para las 22 órbitas. (Sugerencia: emplee la aproximación $\sqrt{1-x} = \frac{x}{2}$ para x pequeñas.) b) ¿La información de la prensa era exacta? Justifique. (a) 39,2 μs, b) exacto hasta un dígito... envejecía 1,78 μs en cada órbita)

a) La fuerza que atrae a la nave hacia la Tierra es la fuerza gravitacional y es igual a la fuerza centrípeta que le afecta, por lo tanto:

$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$, entonces:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{6{,}67x10^{-11}\bullet 5{,}98x10^{24}}{6{,}37x10^6 + 1{,}6x10^5}} = 7.816\frac{m}{s}$$

Entonces, como la velocidad orbital es: $v = \frac{2\pi r}{T}$, entonces: $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R+h)}{v}$

$$T=\frac{2\pi\left(6{,}37x10^{6}+1{,}6x10^{5}\right)}{7.816}=5.246{,}7(s)$$

Entonces, el tiempo transcurrido en 22 órbitas, sería: t_0 = 22 ● 5.246,7 s = 115.427 s

La diferencia entre t y t_0, corresponde a la expresión:

$$t-t_0=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}}-1\right)t_0=\left(\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right)t_0=\left(1+\frac{v^{2}}{2c^{2}}-1\right)t_0=$$

$$\left(\frac{v}{c}\right)^{2}t_0=\frac{1}{2}\left(\frac{7.816}{3x10^{8}}\right)^{2}\bullet 115.427(s)=3{,}9x10^{-5}(s)$$

b) Según lo que publicó la prensa, en cada vuelta el astronauta vive $2x10^{-6}$ s menos, en 22 vueltas, viviría $4{,}4x10^{-5}$ s menos. Entonces, la prensa tiene un error de $5x10^{-6}$ s.

25. La longitud propia de una nave espacial es tres veces la de otra. Las dos naves viajan en la misma dirección y, mientras ambas pasan arriba, un observador en la Tierra las mide y obtiene la misma longitud. Si la nave más lenta se desplaza a 0,35 c, determine la velocidad de la más rápida.

L_{01} = x
L_{02} = 3x

Debido a que ambas naves se "acortan" en la dirección del movimiento, y que tienen igual longitud para un observador en la Tierra, se deduce que la nave de menor longitud se desplaza más lento, entonces:

v_1 = 0,35c
v_2 = v

Las longitudes de las naves son: $L_1=L_{01}\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^{2}}$ *, y* $L_2=L_{02}\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^{2}}$

Y como, según el enunciado, $L_1 = L_2$*, se tiene:*

$$L_{01}\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^{2}}=L_{02}\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^{2}}$$

$$x\sqrt{1-\left(\frac{0,35c}{c}\right)^2} = 3x\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$\sqrt{1-0,35^2} = 3\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$1-0,35^2 = 9(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2)$$

$$1-0,35^2 = 9-\frac{9v^2}{c^2}$$

$$0,8775-9 = -\frac{9v^2}{c^2}$$

$$\frac{9v^2}{c^2} = 9-0,8775 = 8,1225$$

$$v^2 = \frac{8,1225c^2}{9}$$

$$v = 0,95c$$

26. Una nave espacial de 300 m de longitud propia tarda 0,75 μs para pasar a un observador terrestre. Determine su velocidad de acuerdo a como la mide el observador terrestre.

L_0 = 300 m
t = 0,75 μs = $7,5x10^{-7}$ s

$$L = L_0\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}$$

$$vt = L_0\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}$$

$$v^2t^2 = L_0^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\frac{c^2v^2t^2}{L_0^2} = c^2 - v^2$$

$$v^2\left(\frac{c^2t^2}{L_0^2}+1\right) = c^2$$

$$v = \sqrt{\frac{c^2}{\frac{c^2t^2}{L_0^2}+1}} = \frac{c}{\sqrt{\frac{c^2t^2}{L_0^2}+1}} = \frac{c}{\sqrt{\frac{(3x10^8)^2(7,5x10^{-7})^2}{300^2}+1}} = 0,8c$$

27. Unos muones se mueven en órbitas circulares a una velocidad de 0,9994 c en un anillo de almacenamiento de 500 m de radio. Si un muón en reposo decae en otras partículas después de 2,2 μs, ¿cuántos recorridos alrededor del anillo de almacenamiento se espera que realicen los muones antes de decaer?

Cada giro mide 2πR = 3.140 m

Cada giro lo realiza en un tiempo

$$t = \frac{d}{v} = \frac{3.140(m)}{0,9994 \bullet 3x10^8\left(\frac{m}{s}\right)} = 0,1047x10^{-6}(s) = 0,1047μs$$

Ahora, este tiempo, considerando el efecto de la dilatación del tiempo, sería:

$$t = t_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 0{,}1047(\mu s)\bullet\sqrt{1-\left(\frac{0{,}994c}{c}\right)^2} = 0{,}003626\mu s$$

Por lo tanto, para que un muón decaiga, necesita recorrer $\frac{2{,}2\mu s}{0{,}00362\mu s} = 607$ *vueltas*

28. Una nave espacial se mueve a 0,9 c. Si su longitud es L_0 cuando se mide desde el interior de la misma, ¿cuál es su longitud medida por un observador terrestre?

Hay que tomar en cuenta que para efectos de un astronauta que va en la nave, es la Tierra la que se mueve. Por lo tanto, la longitud que observa alguien en la Tierra, sería:

$$L = L_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = L_0\sqrt{1-\left(\frac{0{,}9c}{c}\right)^2} = 0{,}436L_0$$

29. El pión tiene una vida promedio de 26 ns cuando está en reposo. Para que recorra 10 m, ¿qué tan rápido debe moverse?

Aquí el análisis que debe hacerse es: 26 ns es el tiempo que transcurre en reposo, pero respecto a sí mismo, que está en movimiento. Por lo tanto, se cumple que:

$$10(m) = vt_0 = \frac{vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$v = \frac{10c}{\sqrt{t^2c^2+100}} = \frac{10c}{\sqrt{(26x10^{-9})^2(3x10^8)^2+100}} = 0{,}789c$$

30. Si unos astronautas pudieran viajar a v = 0,95c, nosotros en la Tierra afirmaríamos que tardan 4,4 años en llegar a Alfa Centauri a 4,2 años luz de distancia. Los astronautas no estarían de acuerdo. a) ¿Qué tiempo pasa en los relojes de los astronautas?, b) ¿qué distancia a Alfa Centauri miden los astronautas?

a) $t = t_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 4{,}4(\text{años})\bullet\sqrt{1-\left(\frac{0{,}95c}{c}\right)^2} = 1{,}37(\text{años})$

b) $L = L_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 4{,}2(al)\sqrt{1-\left(\frac{0{,}95c}{c}\right)^2} = 1{,}31(al)$

31. Una nave espacial viaja a 0,75c respecto de la Tierra. Si la nave espacial dispara un pequeño cohete hacia delante, ¿qué velocidad inicial (relativa a la nave) debe tener el cohete para que viaje a 0,95c respecto a la Tierra?

v = 0,75c
u’ = 0,95c
u = ?

se tiene que: $u' = \frac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}}$, *entonces* $u = \frac{u'-v}{1-\frac{vu'}{c^2}} = \frac{0{,}95c-0{,}75c}{1-\frac{0{,}75c\bullet 0{,}95c}{c^2}} = 0{,}696c$

32. Cierto quasar se aleja de la Tierra a v = 0,87c. Un chorro de material expulsado del quasar hacia la Tierra se mueve a 0,55c relativo al quasar. Encuentre la velocidad del material expulsado relativa a la Tierra.

v = 0,87c (es positiva la velocidad debido a que se aleja de la Tierra)
u = -0,55c (es negativa debido a que se acerca a la Tierra)

$$u' = \frac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}} = \frac{0{,}87c - 0{,}55c}{1+\frac{0{,}87c \bullet (-0{,}55c)}{c^2}} = 0{,}614c$$

33. Dos chorros de material provenientes del centro de una radio galaxia vuelan alejándose en direcciones opuestas. Ambos chorros se mueven a 0,75c respecto de la galaxia. Determine la velocidad de un chorro con relación al otro.

v = 0,75 c
u' = -0,75c

$$u = \frac{u'-v}{1-\frac{vu'}{c^2}} = \frac{-0{,}75c - 0{,}75c}{1-\frac{0{,}75c \bullet (-0{,}75c)}{c^2}} = 0{,}96c$$

34. Determine la velocidad de una partícula cuya energía total es el doble de su energía en reposo. (0,864c)

$E = 2mc^2$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 2mc^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 2$$

$$\frac{1}{4} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$v = c\frac{3}{4} = 0{,}866c$$

35. Un protón se mueve a 0,95c. Calcule su a) energía en reposo, b) su energía total y c) su energía cinética.

a) $E = mc^2 = 1{,}67x10^{-27}\ (kg) \bullet (3x10^8\ (m/s^2))^2 = 1{,}5x10^{-10}\ J$

b) $$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1{,}67x10^{-27}(kg) \bullet \left(3x10^8\left[\frac{m}{s}\right]\right)^2}{\sqrt{1-\frac{(0{,}95c)^2}{c^2}}} = 4{,}8x10^{-10}\,J$$

c) $$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \bullet 1{,}67x10^{-27}(kg) \bullet \left(0{,}95 \bullet 3x10^8\left[\frac{m}{s}\right]\right)^2 = 6{,}8x10^{-11}\,J$$

36. Una profesora de física en la Tierra aplica un examen a estudiantes que se encuentran en un cohete espacial que viaja a una velocidad v respecto de la Tierra. En el momento en que el cohete pasa sobre la profesora, ésta da la señal para iniciar el examen. Si desea que sus estudiantes tengan el tiempo t_0 (tiempo del cohete) para completar el examen, muestre que debe esperar un tiempo terrestre $t = t_0\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$

Δt_0 es el tiempo que transcurre, en reposo al interior de la nave, por lo tanto debe considerarse que la Tierra se está moviendo. Y según el efecto de la dilatación del tiempo, se tiene:

$$t_0 = \Delta t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\text{, luego: } \Delta t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Y, si se considera que el tiempo que ha de esperarse para que el examen termine, es $\Delta t = T+t$, con T el tiempo que debe esperar la profesora para enviar la señal y t el tiempo necesario para que la señal llegue a los estudiantes.

$$T + t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad (1)$$

La distancia que recorre la nave es $d = v(T + t)$ y la distancia que recorre la señal para llegar a la nave es $d = ct$, por lo tanto:

$$t = \frac{d}{c} = \frac{v(T+t)}{c}$$

Despejando t, se tiene:

$$t = \frac{vT}{v+c} = \frac{\frac{v}{c}T}{1-\frac{v}{c}}$$

Sustituyendo en la ecuación (1), se tiene:

$$T + \frac{\frac{v}{c}T}{1-\frac{v}{c}} = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{T\left(1-\frac{v}{c}\right)+\frac{v}{c}T}{1-\frac{v}{c}} = \frac{T}{1-\frac{v}{c}}$$

Por lo tanto,

$$T = \frac{t_0\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = t_0\sqrt{\frac{\left(1-\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}\right)}} = t_0\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$