RAZONES Y PROPORCIONES

1 Una **razón** es una forma de comparar dos cantidades expresadas en la misma unidad de medida.

1.1 Una razón se expresa de cualquiera de las siguientes formas: $\forall\ \mathbf{a, b} \in \mathbf{Q}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$

$$\boxed{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}} \quad \text{o} \quad \boxed{\mathbf{a : b}}$$

en ambos casos se lee:

“a es a **b”**

a se llama **antecedente**

b se llama **consecuente**

Ejercicio 1) La razón entre 4 y 5 se puede escribir como:

$\frac{4}{5}$ o $4 : 5$

antecedente = 4
consecuente = 5

Ejercicio 2) La razón entre 2 m y 80 cm es:

$\frac{2\text{ m}}{80\text{ cm}}$ pero como deben estar en las mismas unidades, al transformar 2 m a cm, se tiene:

$\frac{200\text{ cm}}{80\text{ cm}}$

Nota 1 : Si se puede simplificar: ¡ hay que hacerlo !, no sólo los números, también las unidades.

Nota 2 : Una razón se comporta en forma similar al de una fracción, por lo tanto se puede amplificar y simplificar.

Nota 3 : Una razón tiene un **valor asociado k**, que corresponde a la división entre el antecedente y el consecuente (a/b = k o a:b = k).

Aplicando lo dicho en la nota anterior, se tiene que:

$$\frac{200\text{ cm}}{80\text{ cm}} = \frac{5}{2}$$

5 ← antecedente
2 ← consecuente

Valor asociado 5:2 = 2,5

El valor asociado que se encontró da a entender que el antecedente es 2,5 veces el consecuente.

Ejercicio 3) Encuentre la razón entre 8 y 32 y luego el valor asociado.

Ejercicio 4) Por amplificación encuentre 2 razones equivalentes a:
a) 2/3 b) 12/15 c) 3:10 d) 11:18

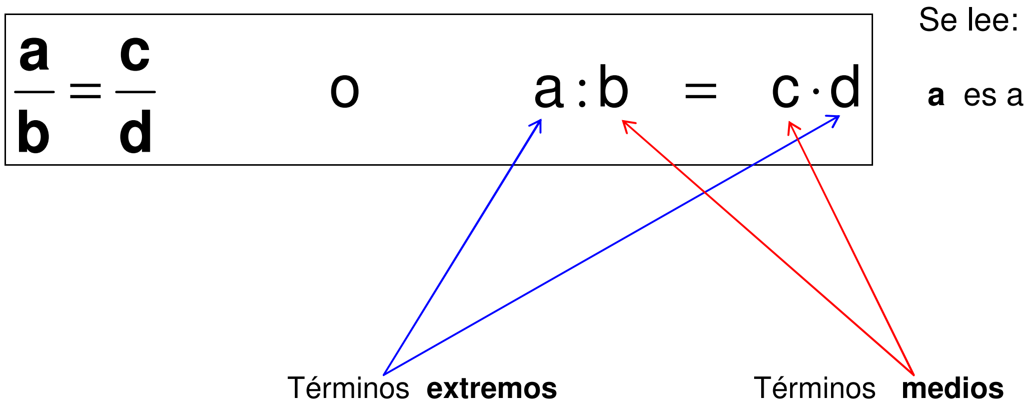
Ejercicio 5) Por simplificación encuentre 2 razones equivalentes a:
a) 20/16 b) 36/24 c) 320:240 d) 48/72

Ejercicio 6) Indique si las siguientes razones son equivalentes o no. Sugerencia: amplifique o simplifique una de ellas o bien determine sus valores asociados.
a) 5:4 y 15/12 b) 18/24 y 6/9 c) 21/14 y 36:24

Ejercicio 7) Encuentre el valor asociado a cada razón siguiente:
a) 1/8 b) 24/16 c) 46:92

2. Una **proporción** es una igualdad entre 2 razones.

Si se tiene que las razones a/b y c/d son equivalentes, entonces:



$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad o \qquad a:b \;=\; c\cdot d$$

Se lee:

a es a **b** como **c** es a **d**

Ejercicio 8) Completar los espacios que faltan en la siguiente tabla:

Proporción	Términos Extremos	Términos Medios
4 : 9 = 8 : 18	4 y 18	9 y 8
5 : 3 = 15 :__	5 y 9	
p : q = x : y		
	m y w	n y z
3 : 12 = __ : 4		

2.1 Propiedad Fundamental de las Proporciones.

En una proporción se cumple lo que se denomina **propiedad fundamental**, es lo que nosotros ya hemos conocido alguna vez como “producto cruzado”, pues en realidad corresponde a la igualdad que se presenta al multiplicar los Términos extremos entre sí y lo mismo entre los Términos medios, esto nos queda:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad a\cdot d \;=\; b\cdot c}$$

Ejemplo 9) Verificar si la siguiente igualdad de razones que se propone es una proporción o no.

2 : 5 = 16 : 40

Para verificarlo se aplica la propiedad fundamental, si con ello se llega a una igualdad entonces es una proporción, de lo contrario no lo es.

$$2 \bullet 40 \overset{?}{=} 5 \bullet 16$$

$$80 = 80$$ ¡ Es una proporción !

Ejemplo 10) Verificar si la siguiente igualdad de razones que se propone es una proporción o no.

$$\frac{3}{4} = \frac{12}{15}$$

Aplicando la propiedad fundamental.

$$3 \bullet 15 \overset{?}{=} 4 \bullet 12$$

$45 \neq 48$ ¡ No es una proporción !

Ejemplo 11) Verificar si las siguiente igualdades de razones que se proponen son proporciones o no.

a) $21 : 7 = 63 : 21$ b) $10 : 8 = 5 : 3$

c) $\frac{½}{¼} = \frac{16}{8}$ d) $\frac{5}{0,4} = \frac{2,5}{0,2}$ e) $\frac{3}{½} = \frac{0,25}{1/24}$

2.1.1 Cálculo de un **valor desconocido de una proporción**:

Ejemplo 12) Sea la proporción **x : b = c : d**. Si las letras b, c y d representan valores conocidos, faltaría saber el valor de x para conocer la proporción.

Para conocer el valor de x, se tienen las siguientes alternativas: amplificación, simplificación o aplicación de propiedades. Veámoslo en un caso numérico:

Supongamos que los valores de b, c y d, son 8, 30 y 24, respectivamente. Siendo así, la proporción sería:

$$\frac{x}{8} = \frac{30}{24}$$

i) Si simplificamos por 3 la segunda razón, se tendrá que

$\frac{x}{8} = \frac{10}{8}$ de esto se puede concluir que $x = 10$

ii) Si amplificamos la primera razón por 3, se tendrá que

$$\frac{3 \bullet x}{24} = \frac{30}{24}$$

de lo anterior se desprende que $3 \bullet x = 30$, por lo tanto, al dividir por 3 se tendrá que $x = 10$

Nota: cualquiera de los dos casos anteriores es recomendable cuando por medio de la amplificación o simplificación se obtiene alguna igualdad entre antecedentes o consecuentes.

iii) Aplicando propiedades. Se trata de aplicar la propiedad fundamental de las proporciones y luego la propiedad inverso multiplicativo.

El ejemplo es: $\frac{x}{8} = \frac{30}{24}$

aplicando la propiedad fundamental se tendrá que $24 \bullet x = 8 \bullet 30$

$$24 \bullet x = 240$$

si multiplicamos la igualdad por el inverso multiplicativo del factor de x, se tendrá

$$\frac{1}{24} \bullet 24 \bullet x = \frac{1}{24} \bullet 240$$

de donde se obtiene $x = \frac{240}{24}$

de lo anterior se tiene, finalmente, que: $x = 10$

Ejercicio 13) Encontrar el valor de x en la proporción $5 : x = 15 : 6$

Aplicando propiedades, se tiene que

paso 1: $5 \bullet 6 = 15 \bullet x$ lo que es equivalente a $15 \bullet x = 5 \bullet 6$

$15x = 30$

paso 2: $x = \frac{30}{15}$

dividiendo: $x = 2$

Ejercicio 14) Hallar x en las siguientes proporciones:

a) $x:5 = 12:20$ b) $2:x = 16:24$ c) $32:18 = x:9$

d) $1/ 2 = 4/x$ e) $x:3 = 4:7$ f) $½ :x = ¾ :5$

g) $0{,}1:2 = x:0{,}5$ h) $3^2:5 = -2:x$

2.2 Situaciones especiales:

2.2.1 Cálculo de la **Cuarta proporcional geométrica**.

Cuando todos los términos de una proporción son diferentes, cualquiera de ellos se denomina cuarta proporcional geométrica (todos los ejercicios 13 y 14).

Ejercicio 15) Hallar la cuarta proporcional geométrica en:

a) $4/x = 3/5 \Rightarrow 20 = 3x \Rightarrow 3x = 20 \Rightarrow x = 20/3$

b) $3:7 = x:21$

2.2.2 Cálculo de la **Media proporcional geométrica**:

Se trata de hallar el valor de x en una proporción de la forma: $\frac{a}{x} = \frac{x}{c}$

Ejercicio 16) Hallar la media proporcional geométrica en:

$4/x = x/9 \Rightarrow 36 = x \bullet x = x^2 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$ o $x = -6$

los dos posibles resultados de x se deben a que: $6^2 = 36$ y $(-6)^2 = 36$

Ejercicio 17) Encuentre la media proporcional geométrica en:

a) $1/x = x/100$ b) $16/x = x = 4$ c) $9/x = x/81$

2.2.3 Cálculo de la **Tercera proporcional geométrica**.

Se trata de hallar el valor de x en alguna de las siguientes situaciones:

$\frac{x}{b} = \frac{b}{c}$ o $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$

Ejercicio 18) Encuentre la tercera proporcional geométrica en:

a) $4/5 = 5/x$ b) $8/4 = 4/x$ c) $x/6 = 6/18$ d) $x/24 = 24/8$

2.3 Propiedades que se cumplen en las proporciones:

Además de la propiedad fundamental de las proporciones, se cumplen las siguientes:

2.3.1 Alternamos sus términos extremos:

Cambia el valor de las razones pero no la proporcionalidad.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $ad = bc$ se convierte en: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; $da = bc$

Ejercicio 19) Dado 4/8 = 12/24 alternamos T. extremos 24:8 = 12:4

Valor de las razones 0,5 3

4•24 = 8•12 24•4 = 8•12
96 = 96 96 = 96

2.3.2 **Alternamos sus términos medios:**

Cambia el valor de las razones pero no la proporcionalidad.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ad = bc se convierte en: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; ad = bc

Ejercicio 20) Dado 3/5 = 9/15 alternamos T. medios 3/9 = 5/15
Valor razones 0,6 0,3333...

3•15 = 5•9 3•15 = 9•5
45 = 45 45 = 45

2.3.3. **Invertimos la proporción:**

Cambia el valor de las razones pero no la proporcionalidad.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ad = bc se convierte en: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; bc = ad

Ejercicio 21) Dado 2/3 = 10/15 se convierte en: 3/2 = 15/10
Valor razones 0,666... 1,5

2•15 = 3•10 3•10 = 2•15
30 = 30 30 = 30

2.3.4 **Permutamos la proporción:**

No cambia el valor de las razones y se mantiene la proporcionalidad.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ad = bc se convierte en: $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$; bc = da

Ejercicio 22) Dado 8/5 = 16/10 se convierte en: 16/10 = 8/5
Valor razones 1,6 1,6

8•10 = 5•16 16•5 = 10•8
80 = 80 80 = 80

2.3.5 **Componemos respecto al antecedente**:

Se mantiene la proporcionalidad (cambia el valor).

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ad = bc se convierte en: $\frac{a + b}{a} = \frac{c + d}{c}$

Ejercicio 23) Dado 6/5 = 18/15 se convierte en: $\frac{6 + 5}{6} = \frac{18 + 15}{18}$

11/6 = 33/18

6•15 = 5•18 11•18 = 6•33
90 = 90 198 = 198

2.3.6 **Componemos respecto al consecuente**:

Se mantiene la proporcionalidad (cambia el valor).

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ad = bc se convierte en: $\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$

Ejercicio 24) Dado 6/5 = 18/15 se convierte en: $\frac{6 + 5}{5} = \frac{18 + 15}{15}$

11/5 = 33/15

6•15 = 5•18 11•15 = 5•33

90 = 90 165 = 165

2.3.7 Descomponemos respecto al antecedente:

Se mantiene la proporcionalidad (cambia el valor).

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ad = bc se convierte en: $\frac{a - b}{a} = \frac{c - d}{c}$

Ejercicio 25) Dado 6/5 = 18/15 se convierte en: $\frac{6 - 5}{6} = \frac{18 - 15}{18}$

1/6 = 3/18

6•15 = 5•18 1•18 = 6•3

90 = 90 18 = 18

2.3.8 Descomponemos respecto al consecuente:

Se mantiene la proporcionalidad (cambia el valor).

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ad = bc se convierte en: $\frac{a - b}{b} = \frac{c - d}{d}$

Ejercicio 26) Dado 6/5 = 18/15 se convierte en: $\frac{6 - 5}{5} = \frac{18 - 15}{15}$

1/5 = 3/15

6•15 = 5•18 1•15 = 5•3

90 = 90 15 = 15

2.3.9 Componemos y descomponemos a la vez:

Se mantiene la proporcionalidad (cambia el valor).

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ad = bc se convierte en: $\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$

Ejercicio 27) Dado 6/5 = 18/15 se convierte en: $\frac{6 + 5}{6 - 5} = \frac{18 + 15}{18 - 15}$

11/1 = 33/3

6•15 = 5•18 11•3 = 1•33

90 = 90 33 = 33

Ejercicio 28) Dadas las siguientes proporciones, aplique todas las propiedades mencionadas anteriormente. No se olvide verificarlas con la propiedad fundamental.

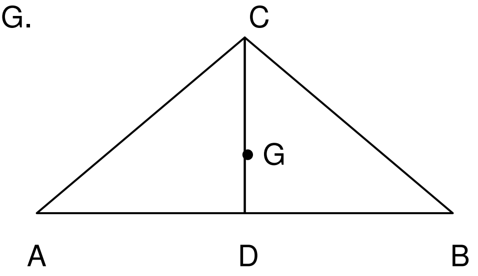
a) 5/4 = 30/24 b) 21/24 = 14/16

Ejercicio 29) Sea el siguiente triángulo ABC, donde CD es una transversal de gravedad y G es el centro de gravedad.

Una de las propiedades del centro de gravedad es que divide a la transversal de gravedad de tal forma que se cumple la proporción CD : CG = 3 : 2.

Encuentre el valor de CG.

AD = 8 cm
AC = 10 cm
∠ADC = 90º



2.4 **Proporcionalidad directa e inversa**:

2.4.1 Dos magnitudes A y B son **directamente proporcionales** si la razón entre A y B es un valor constante k.

$$\boxed{\mathbf{A : B = k}}$$

Ejercicio 30) Un automóvil viaja con tal velocidad que en cada hora recorre 60 km. Determine la razón entre la distancia que recorre y el tiempo que emplea para ello, en los siguientes tiempos transcurridos, completar la tabla siguiente:

datos	a	b	c	d	e	f	g
magnitud A: distancia **d** (km)	60	120	180	240	45	30	15
magnitud B: tiempo **t** (hr)	1	2	3	4	0,75	0,5	0,25
razón entre magnitudes: **d:t**	60	60	60	60	60	60	60

Observación importante: d y t son magnitudes directamente proporcionales, se verificó que a medida que iban cambiando los valores de una los de la otra también cambiaban, sin embargo, la razón entre ellas se mantenía constante.

Si nos fijamos bien, en los datos de la letra **a** a la **d**, si una aumentaba la otra también lo hacía, y en los datos de la **e** a la **g**, si una disminuía la otra también lo hacía. De esto no hay que olvidarse pues tiene mucha utilidad cuando se tengan que resolver otros problemas, especialmente en el razonamiento previo.

Paréntesis: la razón d:t en la asignatura de física se estudiará con detalle y corresponde a la relación matemática para el movimiento con rapidez constante, donde d:t es la rapidez v, por lo tanto: v = d/t. (Esta materia no es de la presente guía).

Problemas diversos:

Ejercicio 30) Si la cuota de cada alumno, en un curso de 30 alumnos, es de $ 500.- ¿Cuánto dinero se recibe si todos los alumnos la cancelan?

Razonamiento: Si un alumno aporta cierta cantidad de dinero y sabiendo que todos aportan lo mismo, entonces al aumentar el número de las personas que aportan dinero, el dinero a recaudar deberá aumentar en la misma proporción (“al mismo ritmo”), por lo tanto, podríamos decir que ambas magnitudes (dinero por cuotas y número de alumnos) son directamente proporcionales. Para resolver el problema ordenemos los datos de la siguiente manera.

número de alumnos	**$ de aporte**
1	500
30	x
+	

Con ese signo (+) señalaremos que la proporcionalidad entre las magnitudes, que inciden en el problema, son directamente proporcionales.

De acuerdo a lo anterior, formamos la siguiente proporción: $\frac{1}{30} = \frac{500}{x}$

y, al resolverla, tenemos que x = 500•30

x = $ 15.000,-

Ejercicio 31) En un almacén, un día se venden 200 chocolates en $ 10.000,-. Si otro día se venden 70 chocolates, ¿cuánto dinero se recaudará por esa venta? ¡Complete los espacios que faltan!

Razonamiento: Si asumimos que los chocolates mantienen el precio y disminuye la venta, entonces también disminuirá el ingreso, por lo tanto las magnitudes (nª de ___________ y ________ recaudado) son ____________ proporcionales.

número de ___________	**$ ___________**
200	
	x
+	

El signo + es porque las magnitudes son ___________ ___________.

La proporción que se forma es: $\underline{200}$ = ______

Al resolver la proporción se tiene x = $ _______

Ejercicio 32) En un día de invierno durante una hora llueve en forma constante, de manera que cada 5 minutos caen 8 mm de agua. ¿Cuántos mm de agua caerán en tres cuarto de hora?

Ejercicio 33) Un cuaderno tiene, en promedio, una masa de 150 gramos. Si en un curso de 35 alumnos, cada uno lleva 8 cuadernos en su mochila. ¿Cuántos kilogramos de cuaderno lleva en conjunto, todos los alumnos?

Ejercicio 34) En un negocio se recaudan $ 9.000,- en la venta de 60 helados. Si un día muy bueno recaudan $ 15.000,- y otro muy malo sólo $ 3.000,-. ¿Cuántos helados se venden en cada día?

2.4.2 Dos magnitudes A y B, son **inversamente proporcionales** si el producto entre ellas es una constante.

$$\boxed{A \bullet B = k}$$

Ejercicio 35) Una persona desea comprar un terreno rectangular cuya área sea de 800 m^2. Sólo comprará un cuyo ancho y largo, sean números naturales mayores que 6. ¿Cuáles son todas las posibilidades que tendría? ¡Complete el siguiente cuadro?

ancho (m) **a**	largo (m) **l**	área (m^2) **A = a•l**
100	8	800
	10	
50		800
	20	
32		
8		800
	80	
16		
	40	800

Mientras una aumenta la otra disminuye, en la misma proporción.

Problemas diversos:

Ejercicio 36) Un vehículo es capaz de viajar a 200 km/hr durante 2 horas para cubrir la distancia entre dos ciudades. ¿Cuánto tiempo tardaría, en cubrir la misma distancia, viajando a la máxima rapidez permitida en la carretera?

Razonamiento: Como sabemos, la máxima rapidez en carretera es de 100 km/hr, entonces, al disminuir la rapidez demorará más en llegar a su destino. Por lo tanto, como una magnitud aumenta y la otra disminuye, se tiene que las magnitudes son inversamente ______________.

rapidez km/hr v	**tiempo t**
200	2
100	x
-	

Con ese signo (-) señalaremos que la proporcionalidad entre las magnitudes, que inciden en el problema, son ___________ proporcionales.

Con la información que se tiene y, de acuerdo a la relación A•B = k, tendremos:

v • t = k, entonces:

$$100 \bullet x = 200 \bullet 2$$
$$100x = 400$$
$$x = \frac{400}{100}$$

Respuesta: x = 4 horas

Otra forma de resolverlo es formando una proporción donde los valores de una magnitud forman una razón y la otra se forma con la otra magnitud pero de forma inversa. Esto queda así:

$$\frac{100}{200} = \frac{2}{x}$$

Resolviéndola se tiene que: $100 \bullet x = 200 \bullet 2$

de donde, de igual forma se tiene: x = 4 horas

Ejercicio 37) Juan tiene dinero suficiente para comprar 20 dulces de $ 40,- cada uno. Si los dulces suben a $ 50.- ¿Cuántos podrá comprar?

Ejercicio 38) Para hacer un trabajo, 4 personas demoran 5 días, ¿cuánto demorarán 10 personas en el mismo trabajo, al mismo ritmo que los primeros?

Ejercicio 39) Con una máquina se fabrican 2.000 tornillos en 8 horas. ¿Cuántas máquinas del mismo tipo serían necesarias para demorarse sólo 2 horas?

2.4.3 Proporcionalidad compuesta:

En este capítulo se estudian problemas donde intervienen tres o más magnitudes.

Ejercicio 40) Cuatro operarios producen, en 10 días, 320 piezas de un cierto producto. ¿Cuántas piezas de este mismo producto serán producidas por 10 operarios en 16 días?

Razonamiento: Se desconoce un valor de la magnitud **Número de piezas**, por lo tanto hay que determinar qué tipo de proporcionalidad hay entre cada una de las otras magnitudes y esa en que se desconoce uno de sus valores. Haciendo lo anterior se puede precisar que entre **Número de** operarios y **Número de piezas** hay una proporcionalidad directa y lo mismo ocurre entre la **Cantidad de días** y el **Número de piezas**, por lo tanto, ordenando los datos se tendrá:

Número de operarios	Número de días	Número de piezas
4	10	320
10	16	x
+	+	

Las razones que se forman son: 4/10; 10/16 y 320/x

La proporción que se forma es aquella formada al igualar a la razón que contiene el valor desconocido con el producto de las otras dos razones, por lo tanto, se tiene:

$$\frac{320}{x} = \frac{4}{10} \bullet \frac{10}{16}$$

Realizando el producto: $\frac{320}{x} = \frac{1}{4}$

De donde: $1 \bullet x = 320 \bullet 4 \Rightarrow x = 1.280$

Ejercicio 41) Dieciocho obreros, trabajando 7 horas por día, realizan un determinado servicio en 12 días. ¿En cuántos días, 12 trabajadores que trabajan 9 horas por día, harán el mismo servicio?

En análisis de la información se concluye que:

- Si disminuye el **Número de trabajadores** se necesitan más **días**, para hacer el trabajo, por lo tanto forman una proporcionalidad inversa.
- Si aumenta el **Número de horas por día** se necesitan menos **días**, para hacer el trabajo, por lo tanto forman una proporcionalidad inversa.

Número de trabajadores	Número horas por día	Días
18	7	12
12	9	x
-	-	

Se forman las razones: 12/18; 9/7 y 12/x

Por lo tanto, la proporción es: $\frac{12}{x} = \frac{12}{18} \bullet \frac{9}{7}$

De donde: $\frac{12}{x} = \frac{6}{7}$ Por lo que x = _____

Ejercicio 42) Diez máquinas preparan un terreno de 30 hectáreas en 9 días. ¿En cuántos días 12 máquinas, idénticas a las primeras, prepararán un terreno de 48 hectáreas?

- Para hacer un trabajo, si aumenta el **Número de máquinas** disminuirá el **Número de días**, por lo tanto estas magnitudes son inversamente proporcionales.
- Para hacer un trabajo, si aumenta el **Número de hectáreas** aumentará el **Número de días**, por lo tanto estas magnitudes son directamente proporcionales.

Número de máquinas	Número de hectáreas	Número de días
10	30	9
12	48	x
-	+	

Se forman las razones: 12/10; 30/48 y 9/x

Por lo tanto, la proporción es: $\frac{9}{x} = \frac{12}{10} \bullet \frac{30}{48}$

De donde: $\frac{9}{x} = \underline{\qquad}$ por lo que x =

Ejercicio 43) Veinticinco ampolletas originan un gasto de $ 3.000 al mes, estando encendidas 6 horas diarias. ¿Qué gasto originarías 5 ampolletas en 45 días, encendidas durante 8 horas diarias?

Ejercicio 44) Un horno a petróleo consume 18 litros en 5 días, funcionando 4 horas diarias. ¿En cuántos días consumirá 48 litros, si funciona 9 horas diarias?

Ejercicio 45) La alimentación de 12 animales, durante 8 días, cuesta $ 8.000,- ¿Cuál sería el costo de la alimentación de 15 animales en 5 días?

RESULTADOS:

3)	¼	0,25								
4)	infinitas posibilidades									
5)	infinitas posibilidades									
6)	a)	si	b)	no	c)	si				
7)	a)	0,125	b)	1,5	c)	0,5				
11)	a)	si	b)	no	c)	si	d)	si	e)	si
14)	a)	3	b)	3	c)	16	d)	8	e)	12/7
	f)	10/3	g)	1/40	h)	-10/9				
15)	b)	9								
17)	a)	10	b)	8	c)	27				
18)	a)	25/4	b)	2	c)	2	d)	72		
29)	4									
31)	$ 3.500,-									
32)	72 mm									
33)	42 kg									
34)	100	20								
37)	16									
38)	2									
39)	4									
41)	14									
43)	$ 1.200,-									
44)	160/7 = 5,92...			en el sexto día						
45)	$ 6.250.-									