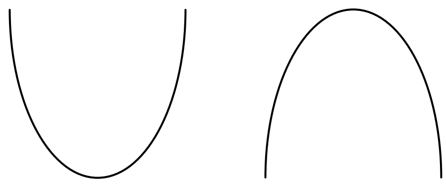
Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$

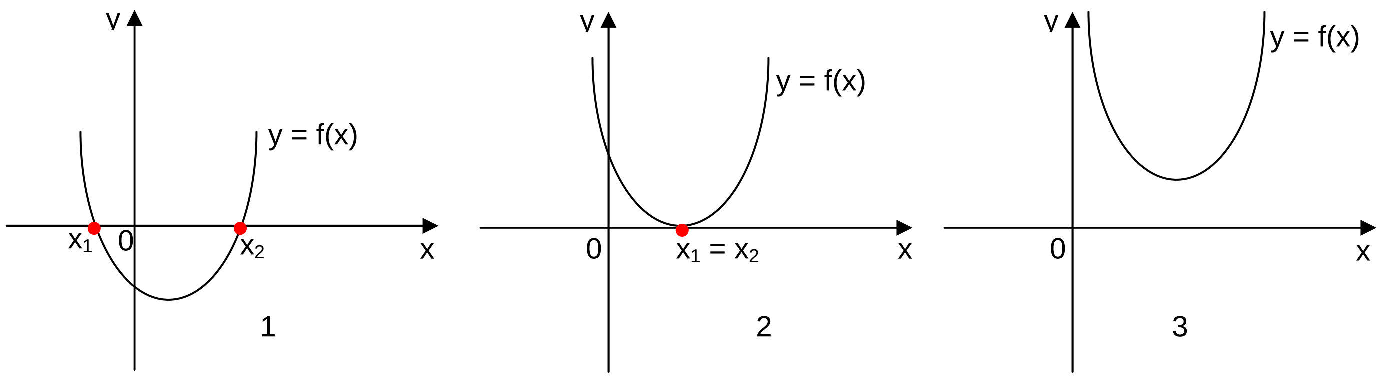
¿Qué significa solucionar una ecuación de segundo grado?

Solucionar una ecuación de segundo grado proviene de encontrar los valores de la variable independiente, usualmente x, para los que la función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ toma el valor 0.

En forma gráfica. Una función cuadrática y = f(x) puede tener dos formas posibles, y ellas son:



Si cualquiera de esas funciones se ubica en un sistema cartesiano XY, puede asumir tres posiciones posibles.



En el caso 1, debido a que la función f(x) intercepta al eje X en dos puntos, hay dos soluciones diferentes x_1 y x_2.

En el caso 2, la función f(x) intercepta al eje X en solo un punto, entonces hay dos soluciones iguales $x_1 = x_2$.

Y, en el caso 3, no hay soluciones en los números reales, esto es porque la función no se intercepta con el eje x. En este caso, debe considerarse la definición de un número imaginario puro como $\sqrt{-1} = i$. El número i no pertenece al conjunto de números reales, pertenece al de los números complejos. Y, en estricto rigor, las soluciones x_1 y x_2 existien, pero en el conjunto de los números complejos. Esto será explicado con detención en cursos superiores.

Ejercicios

Todos los ejercicios que se presentan a continuación corresponden a funciones y = f(x) que se han igualado a 0. Por lo tanto, todas tienen dos soluciones posibles, podrán ser diferentes como en el caso 1, o iguales como en el caso 2, o no existir en los números reales como en el caso 3.

Primer caso: Incompletas puras. Con b = 0. Ecuaciones del tipo $\mathbf{ax^2 + c = 0}$

Fórmula para resolverlas: $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$,

Es decir: $\mathbf{x_1} = +\sqrt{-\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}}$ y $\mathbf{x_2} = -\sqrt{-\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}}$

1.- $3x^2 = 48$
2.- $5x^2 - 9 = 46$
3.- $7x^2 + 14 = 0$
4.- $9x^2 - a^2 = 0$
5.- $(x + 5)(x - 5) = 0$
6.- $(2x - 3)(2x + 3) - 135 = 0$
7.- $3(x + 2)(x - 2) = (x - 4)^2 + 8x$
8.- $\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$
9.- $(2x - 1)(x + 2) - (x + 4)(x - 1) + 5 = 0$
10.- $\frac{5}{3x^2} - \frac{1}{6x^2} = \frac{7}{12}$
11.- $\frac{2x - 3}{x - 3} = \frac{x - 2}{x - 1}$

12.- $\frac{x^2-5}{3}+\frac{4x^2-1}{5}-\frac{14x^2-1}{15}=0$

13.- $2x-3-\frac{x^2+1}{x-2}=-7$

14.- $3-\frac{3}{4x^2-1}=2$

Segundo caso. Incompletas binomiales. Con c = 0. Son del tipo $ax^2 + bx = 0$

Soluciones: $\mathbf{x_1 = 0}$ y $\mathbf{x_2 = -\frac{b}{a}}$

1.- $x^2 = 5x$
2.- $4x^2 = -32x$
3.- $x^2 - 3x = 3x^2 - 4x$
4.- $5x^2 + 4 = 2(x + 2)$
5.- $(x - 3)^2 - (2x + 5)^2 = -16$
6.- $\frac{x^2}{3}-\frac{x-9}{6}=\frac{3}{2}$
7.- $(4x -1)(2x + 3) = (3x + 3)(x - 1)$
8.- $\frac{x+1}{x-1}=\frac{x+4}{x-2}=1$

Ecuaciones completas

Caso particular. Con a = 1. Son del tipo $x^2 + bx + c = 0$

Fórmula de solución: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$

Es decir: $\mathbf{x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}}$ y $\mathbf{x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}}$

1.- $x^2 - 3x + 2 = 0$
2.- $x^{2'} - 2x - 15 = 0$
3.- $x^2 = 19x - 88$
4.- $x^2 + 34x = 285$
5.- $5x(x - 1) - 2(2x^2 - 7x) = -8$
6.- $x^2 - (7x + 6) = x + 59$
7.- $(x - 1)^2 + 11x + 199 = 3x^2 - (x - 2)^2$
8.- $(x - 2)(x + 2) - 7(x - 1) = 21$
9.- $2x^2 - (x - 2)(x + 5) = 7(x + 3)$
10.- $(x - 1)(x + 2) - (2x - 3)(x + 4) - x + 14 = 0$

Caso general. Son del tipo $ax^2 + bx + c = 0$

Fórmula de solución: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Es decir: $\mathbf{x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ y $\mathbf{x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

1.- $3x^2 - 5x + 2 = 0$
2.- $4x^2 + 3x - 22 = 0$
3.- $x^2 + 11x = -24$
4.- $x^2 = 16x - 63$
5.- $12x - 4 - 9x^2 = 0$
6.- $5x^2 - 7x - 90 = 0$
7.- $6x^2 = x + 222$
8.- $x + 11 = 10x^2$
9.- $49x^2 - 70x + 25 = 0$
10.- $12x - 7x^2 + 64 = 0$
11.- $x^2 = -15x - 56$
12.- $32x^2 + 18x - 17 = 0$
13.- $176x = 121 + 64x^2$
14.- $8x + 5 = 36x^2$
15.- $27x^2 + 12x - 7 = 0$
16.- $15x = 25x^2 + 2$
17.- $8x^2 - 2x - 3 = 0$
18.- $105 = x + 2x^2$

19.- $x(x + 3) = 5x + 3$
20.- $3(3x - 2) = (x + 4)(4 - x)$
21.- $9x + 1 = 3(x^2 - 5) - (x - 3)(x + 2)$
22.- $(2x - 3)^2 - (x + 5)^2 = -23$
23.- $25(x + 2)^2 = (x - 7)^2 - 81$
24.- $3x(x - 2) - (x - 6) = 23(x - 3)$
25.- $7(x - 3) - 5(x^2 - 1) = x^2 - 5(x + 2)$
26.- $(x - 5)^2 - (x - 6)^2 = (2x - 3)^2 - 118$
27.- $(5x - 2)^2 - (3x + 1)^2 - x^2 - 60 = 0$
28.- $(x + 4)^2 - (x - 3)^2 = 343$
29.- $(x + 2)^2 - (x - 1)^2 = x(3x + 4) + 8$
30.- $(5x - 4)^2 - (3x + 5)(2x - 1) = 20x(x - 2) + 27$

31.- $\frac{x^2}{5}-\frac{x}{2}=\frac{3}{10}$

32.- $4x-\frac{13}{x}=\frac{3}{2}$

33.- $\frac{x^2}{6}-\frac{x}{2}=3(x-5)$

34.- $\frac{1}{4}(x-4)+\frac{2}{5}(x-5)=\frac{1}{5}(x^2-53)$

35.- $\frac{5}{x}-\frac{1}{x+2}=1$

36.- $\frac{15}{x}-\frac{11x+5}{x^2}=-1$

37.- $\frac{8x}{3x+5}+\frac{5x-1}{x+1}=3$

38.- $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{6}$

39.- $1-\frac{2x-3}{x+5}=\frac{x-2}{10}$

40.- $\frac{x-13}{x}=5-\frac{10(5x+3)}{x^2}$

41.- $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{x}=\frac{5}{2}$

42.- $\frac{4x^2}{x-1}-\frac{1-3x}{4}=\frac{20x}{3}$

43.- $\frac{3x-1}{x}-\frac{2x}{2x-1}-\frac{7}{6}=0$

44.- $\frac{5x-8}{x-1}=\frac{7x-4}{x+2}$

45.- $\frac{x+3}{2x-1}-\frac{5x-1}{4x+7}=0$

46.- $\frac{1}{4-x}-\frac{1}{6}=\frac{1}{x+1}$

47.- $\frac{x+4}{x+5}-\frac{x+2}{x+3}=\frac{1}{24}$

48.- $\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x+1}=3\frac{5}{8}$

49.- $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{2x+9}{x+3}$

50.- $\frac{3}{x+2}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x+1}$

Resolver mediante procedimiento de **factorización**.

1.- $x^2 - x - 6 = 0$

2.- $x^2 + 7x = 18$

3.- $8x - 65 = -x^2$

4.- $x^2 = 108 - 3x$

5.- $2x^2 + 7x - 4 = 0$

6.- $6x^2 = 10 - 11x$

7.- $20x^2 - 27x = 14$

8.- $7x = 15 - 390x^2$

9.- $60 = 8x^2 + 157x$

10.- $x(x-1) - 5(x-2) = 2$

11.- $(x-2)^2 - (2x+3)^2 = -80$

12.- $\frac{6}{x^2}-\frac{9}{x}=-\frac{4}{3}$

13.- $\frac{x+2}{x}+x=\frac{74}{x}$

14.- $(x+2)^2-\frac{2x-5}{3}=3$

15.- $\frac{x}{x-2}+x=\frac{3x+15}{4}$

16.- $\frac{6}{x-4}-\frac{4}{x}=\frac{5}{12}$

17.- $(x-2)^3 - (x-3)^3 = 37$

18.- $\frac{x-1}{x+1}-2=\frac{x+3}{3}$

19.- $\frac{4x-1}{2x+3}=\frac{2x+1}{6x+5}$

20.- $\frac{3x+2}{4}=5-\frac{9x+14}{12x}$

Ecuaciones literales.

1.- $x^2 + 2ax - 35a^2 = 0$

2.- $10x^2 = = 36a^2 - 3ax$

3.- $a^2x^2 + abx - 2b^2 = 0$

4.- $89bx = 42x^2 + 22b^2$

5.- $x^2 + ax = 20a^2$

6.- $2x^2 = abx + 3a^2b^2$

7.- $b^2x^2 + 2abx = 3a^2$

8.- $x^2 + ax - bx = ab$

9.- $x^2 - 2ax = 6ab - 3bx$

10.- $3(2x^2 - mx) + 4nx - 2mn = 0$

11.- $x^2 - a^2 - bx - ab = 0$

12.- $abx^2 - x(b - 2a) = 2$

13.- $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$

14.- $4x(x-b) + b^2 = 4m^2$

15.- $x^2 - b^2 + 4a^2 - 4ax = 0$

16.- $x^2 - (a+2)x = -2a$

17.- $x^2 + 2x(4-3a) = 48a$

18.- $x^2 - 2x = m^2 + 2m$

19.- $x^2 + m^2x(m-2) = 2m^5$

20.- $6x^2 - 15ax = 2bx - 5ab$

21.- $\frac{3x}{4}+\frac{a}{2}-\frac{x^2}{2a}=0$

22.- $\frac{2x-b}{2}=\frac{2bx-b^2}{3x}$

23.- $\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-2x}{a+x}=-4$

24.- $\frac{x^2}{x-1}=\frac{a^2}{2(a-2)}$

25.- $x + \frac{2}{x} = \frac{1}{a} + 2a$

26.- $\frac{2x - b}{b} - \frac{x}{x + b} = \frac{2x}{4b}$

Ecuaciones irracionales de segundo grado. Es indispensable comprobar las dos raíces que se encuentran.

1.- $x + \sqrt{4x + 1} = 5$

2.- $2x - \sqrt{x - 1} = 3x - 7$

3.- $\sqrt{5x - 1} + \sqrt{x + 3} = 4$

4.- $2\sqrt{x} - \sqrt{x + 5} = 1$

5.- $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 3} = 3$

6.- $\sqrt{x - 3} + \sqrt{2x + 1} - 2\sqrt{x} = 0$

7.- $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{3 - x} = \sqrt{2x}$

8.- $\sqrt{3x + 1}\sqrt{5x} = \sqrt{16x + 1}$

9.- $\sqrt{2x + \sqrt{4x - 3}} = 3$

10.- $\sqrt{x + 3} + \frac{6}{\sqrt{x + 3}} = 5$

11.- $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} = 5$

12.- $2\sqrt{x} = \sqrt{x + 7} + \frac{8}{\sqrt{x + 7}}$

13.- $\sqrt{x + \sqrt{x + 8}} = 2\sqrt{x}$

14.- $\sqrt{6 - x} + \sqrt{x + 7} - \sqrt{12x + 1} = 0$