

## Guía sobre Funciones

Una **función** es una correspondencia entre elementos de dos conjuntos, al igual que una relación pero con dos condiciones:

- i) todos los elementos del conjunto de partida, dominio, están asociados a elementos del conjunto de llegada, recorrido.
- ii) a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada o codominio o recorrido.

Sean las siguientes relaciones definidas en los números reales.

$$T_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / b = a^2\} \text{ y } T_2 = \{(c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / d = \sqrt{c}\}$$

Esas relaciones, ¿son, a su vez, funciones?

$T_1$  sí lo es ya que para cada valor de  $a$ ,  $a^2$  es único. Es decir, para todo elemento  $a$  del dominio existe un único elemento  $b = a^2$  que pertenece al codominio.

Sin embargo  $T_2$  no es función, esto es así pues para cada elemento  $c$  del dominio existen dos elementos en el codominio, por ejemplo, si  $c = 4$ ,  $d$  sería  $2$  o  $-2$ . Y con ello no se cumple el requisito ii) mencionado anteriormente. Sin contar, además, que al estar ambas funciones definidas en el conjunto de los números reales, para cualquier valor de  $c < 0$  no habría imagen, con ello no se estaría cumpliendo el requisito i) mencionado.

Una función **f** definida de **A** en **B** se denota como:  $f : A \rightarrow B$ , o  $A \xrightarrow{f} B$ .

Al único elemento del codominio **B** que le corresponde, según la función **f**, a un elemento del dominio **A**, que se representa como **f(a)**, se le llama imagen de **a**.

Así, entonces, se tiene que toda función  $f : A \rightarrow B$  le corresponde en el producto cartesiano  $A \times B$  una relación definida por  $\{(a, f(a)) / a \in A \text{ y } f(a) \in B\}$

¿Cómo se encuentran los elementos que son imágenes de una función  $f$ ?

Por ejemplo, consideremos la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de modo que  $y = f(x) = x^2 - 3x - 5$ . La imagen de 4 según la función  $f$  es:

$$f(4) = 4^2 - 3 \cdot 4 - 5 = 16 - 12 - 5 = -1$$

Nota: Cuando se hace referencia a la función  $f$ , la función se denota como  $f$ , pero si se hace referencia a los elementos del recorrido de la función, es decir a aquellos elementos del codominio que son imágenes, la escritura es  $f(x)$ .

### Representación gráfica de las funciones.

Las funciones se pueden representar, igual que las relaciones, en diagramas de Venn y en sistemas de coordenadas.

En adelante se utilizarán las siguientes abreviaturas para conjuntos numéricos:

R: números reales.  
Z: números enteros.  
N: números naturales.

Los superíndices  $+$  y  $-$  se refieren a los números positivos y negativos respectivamente.

Ejemplo. Representación en un sistema de coordenada. Sea la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que  $y = f(x) = x^2$ . Los valores que se utilizarán en la construcción de un gráfico serán los de la forma  $(x, x^2)$ .

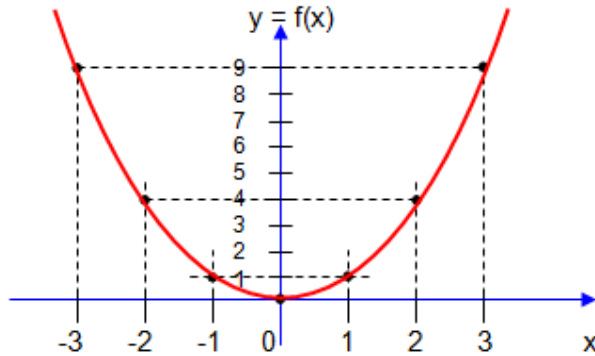
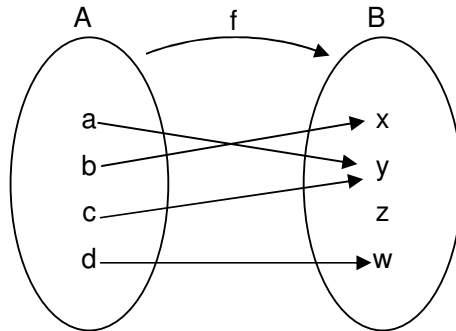


Diagrama de Venn. Sea la función  $f : A \rightarrow B$ , con  $A = \{a, b, c, d\}$  y  $B = \{x, y, z, w\}$  tal que el gráfico de  $f$  es la relación  $\{(a, y); (b, x); (c, y); (d, w)\}$ .



**Función compuesta.**

Sean dos funciones  $f$  y  $g$ ,  $f$  definida como  $f : A \rightarrow B$  y  $g$  definida como  $g : B \rightarrow C$ .

La función compuesta  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

Lo anterior quiere decir que para un valor  $x$  del conjunto  $A$  se encuentra primero su imagen  $f(x)$  en  $B$  y, posteriormente, se encuentra la imagen de  $f(x)$  en  $C$ , es decir  $g(f(x))$ .

Por ejemplo, sea  $f(x) = 3x + 2$  y  $g(x) = 2 - 4x$ .

$$(g \circ f)(5) = g(3 \cdot 5 + 2) = g(17) = 2 - 4 \cdot 17 = -66$$

**Tipos de funciones.**

i) Función **inyectiva** o “uno a uno”.

Una función  $f$ , con  $f : A \rightarrow B$ , es inyectiva si para cada elemento distinto del dominio sus imágenes son también diferentes.

Es decir, si  $f(a) = f(a') \rightarrow a = a'$

ii) Función **sobreyectiva** o “sobre”.

Una función  $f$ , con  $f : A \rightarrow B$ , es sobreyectiva si todo  $b \in B$  es imagen de algún  $a \in A$ .

Es decir,  $\forall b \in B, \exists a \in A \quad / \quad f(a) = b$

iii) Función **biyectiva**.

Una función es biyectiva si es, al mismo tiempo, inyectiva y sobreyectiva.

**Función inversa** o recíproca.

Sea  $f : A \rightarrow B$ ,  $f^{-1}$  es inversa si está definida como  $f^{-1} : B \rightarrow A$

Para que  $f^{-1}$  sea función es necesario que  $f$  sea biyectiva.

**Función identidad.**

Sea  $f : A \rightarrow B$ ,  $f$  es función identidad si  $f(a) = a$ , para todo  $a$  que pertenece a  $A$ . A esta función se le suele llamar “diagonal  $\Delta_A$ ” o  $1_A$  o simplemente “1”.

Es decir:  $1_A(a) = a$

Si se tiene la función identidad  $1_B$  para elementos del conjunto  $B$ , entonces:

$$1_B \circ f = f = f \circ 1_A$$

Y, además, si  $f$  es biyectiva, se cumplirá que:

$$f^{-1} \circ f = 1_A \quad \text{y} \quad f \circ f^{-1} = 1_B$$

**Algebra de funciones numéricas reales.**

Sea  $F(X, R)$  el conjunto de todas las funciones numéricas reales definidas en algún conjunto numérico  $X$ , que es subconjunto de  $R$ . Sean las funciones  $f : X \rightarrow R$ ,  $g : X \rightarrow R$  y  $k \in R$ , con ellas se definen:

- |    |                                 |      |                                    |
|----|---------------------------------|------|------------------------------------|
| a) | $(f + g) : X \rightarrow R$     | como | $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$         |
| b) | $(k \cdot f) : X \rightarrow R$ | como | $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$    |
| c) | $( f ) : X \rightarrow R$       | como | $( f )(x) =  f(x) $                |
| d) | $(f \cdot g) : X \rightarrow R$ | como | $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ |
| e) | $(f + k) : X \rightarrow R$     | como | $(f + k)(x) = f(x) + k$            |

**Axiomas que se cumplen con las funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$  definidas en un conjunto dado con las operaciones de la adición (+) y multiplicación ( $\cdot$ ).**

a) Con la adición

- 1) Asociatividad:  $(f + g) + h = f + (g + h)$
- 2) Conmutatividad:  $f + g = g + f$
- 3) Existencia de elemento neutro. En este caso es la función 0.  
 $\exists 0 \in F(X, R)$ , es decir:  $0 : X \rightarrow R$ , tal que:  $0 + f = f + 0 = f$

4)  $\forall f \in F(X, \mathbb{R}), \exists -f \in F(X, \mathbb{R})$ , es decir  $-f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f + (-f) = 0$

b) Con la multiplicación, siendo  $k$  y  $k'$  números reales.

1)  $k \cdot (k' \cdot f) = (k \cdot k') \cdot f$

2)  $1 \cdot f = f$

c) Con ambas, adición y multiplicación.

1)  $k \cdot (f + g) = k \cdot f + k \cdot g$

2)  $(k + k') \cdot f = k \cdot f + k' \cdot f$

### **Función acotada**

a) Cota superior

Si  $M \in \mathbb{R}$ , entonces  $M$  es la cota superior de una función  $f$ , con  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , si se cumple que  $|f(x)| \leq M$ , para todo  $x \in X$ .

Con símbolos matemáticos:

$$\exists M \in \mathbb{R} / |f(x)| \leq M, \forall x \in X$$

Ejemplo: si  $f(x) = \text{sen } x$ , entonces la cota superior de la función  $f$  es 1, ya que el máximo valor que puede tomar la función seno es 1, y eso ocurre cuando  $x$  es  $90^\circ$ .

Otro ejemplo: Sea  $g(x) = \frac{4}{1-x}$ , con  $x \neq 1$ . La función  $g$  no está acotada superiormente ya que al disminuir el denominador, la función crece sin límite.

b) Cota inferior

Si  $m \in \mathbb{R}$ , entonces  $m$  es la cota inferior de una función  $f$ , con  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , si se cumple que  $|f(x)| \geq m$ , para todo  $x \in X$ .

Con símbolos matemáticos:

$$\exists m \in \mathbb{R} / |f(x)| \geq m, \forall x \in X$$

Ejemplo: Sea  $h(x) = |x - 4|$ , el menor valor que puede tener la función  $h$  es - 4 cuando  $x = 0$ , por lo tanto la función está acotada inferiormente en el valor - 4.

### **Bibliografía**

Varios textos, siendo el principal: Topología General, Seymour Lipschutz, 1970, Editorial MacGraw Hill