

# Relaciones

Fuente: Topología General, Seymour Lipschutz, 1970, Editorial MacGraw Hill y otros.

Una relación binaria, comúnmente llamada relación, establece una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos dados.

Una relación  $R$  entre un conjunto  $A$  no vacío y uno  $B$  no vacío asocia pares  $(a, b)$ , con  $a \in A$  y  $b \in B$ , del conjunto  $A \times B$ , de modo que se cumple:

- i)  $a$  está relacionada con  $b$ , lo que se expresa como  **$a R b$**
- ii)  $a$  no está relacionada con  $b$ , lo que se expresa como  **$a \not R b$**

Cuando se dice que  $a$  está relacionada con  $b$ , se quiere decir que hay una correspondencia directa entre esos elementos, correspondencia que en el caso que analizaremos será de tipo matemática, también puede ser de otra naturaleza pero esta vez no nos ocuparemos de esos casos.

Sea una relación  $R$  definida como  $R: A \rightarrow B$ , de modo que a un elemento  $a$  del conjunto de partida ( $A$ ), se le asocia un elemento  $b$  del conjunto de llegada ( $B$ ).

$$R = \{(a, b) \in A \times B / a \in A, b \in B\}$$

Se llama **dominio** de una relación, al conjunto de elementos del conjunto de partida que cumplen con la relación  $R$ , y **codominio o recorrido** al conjunto de elementos del conjunto de llegada que cumplen con la relación  $R$ . A cada elemento del dominio también se le llama **preimagen** y a los del codominio se les llama **imágenes**.

La relación inversa,  $R^{-1}$  está definida como

$$R^{-1} = \{(b, a) / (a, b) \in A \times B\}$$

Ejemplo: Si  $R = \{(1, 4); (2, 5); (3, 6)\}$ , entonces  $R^{-1} = \{(4, 1); (5, 2); (6, 3)\}$

Hay diversos tipos de relaciones, como:

- i) Se llama relación **idéntica** a la relación  $R = \{(a, a) / a \in A\}$
- ii) Relación de **equivalencia**.

Se define una relación  $R: A \times A$  (donde  $A$  puede ser el conjunto de los números reales u otro).

La relación de equivalencia es una de las más importantes y para que lo sea deben cumplirse las siguientes propiedades:

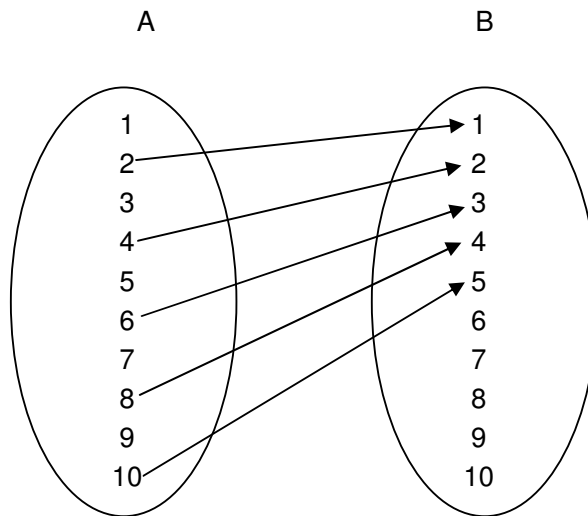
- a) Reflexiva:  $\forall a \in A, (a, a) \in R$ .
  - b) Simetría: si  $(a, b) \in R$ , entonces  $(b, a) \in R$ .
  - c) Transitiva: si  $(a, b) \in R$  y  $(b, c) \in R$ , entonces  $(a, c) \in R$ .
- iii) Relación de **orden**. Si en la función  $R$  se cumplen las propiedades:
- a) Reflexiva.
  - b) Antisimétrica: si  $(a, b) \in R$  y  $(b, a) \in R$ , entonces  $a = b$ .
  - c) Transitiva.

Una relación es de **orden total** si todos los elementos del conjunto A, en donde está definida la relación R, se relacionan entre sí, por ejemplo: el conjunto de los naturales con  $\leq$  o también puede ser con  $\geq$ .

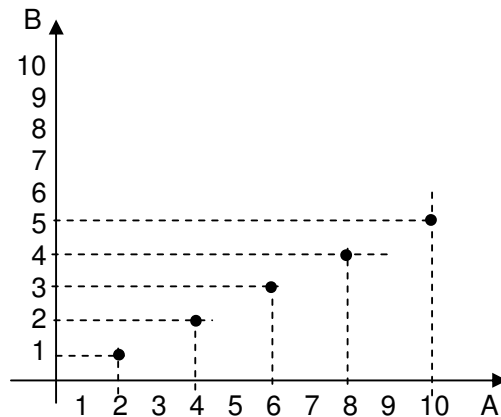
Una relación es de **orden parcial** si al menos un par de elementos del conjunto A se relacionan entre sí.

Para representar relaciones en forma gráfica se puede utilizar el **diagrama de Venn** o un sistema de coordenadas.

a) Diagrama de Venn. Sea la relación R definida como  $R = \{(a, b) \in A \times B / a = 2b\}$ , con  $A = B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$



b) La misma relación anterior, en un sistema de coordenadas sería:



Ejercicios:

1) Sea R la relación  $<$  entre  $a = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $B = \{1, 3, 5\}$ , es decir  $A \times B = \{(a, b) / a < b\}$

a) Expresar R como un conjunto de pares ordenados (a, b).

- b) Representar R en un diagrama de coordenadas (A en el eje horizontal y B en el eje vertical).
- c) Hallar el dominio de R y el recorrido de R.
- d) Hallar el dominio de  $R^{-1}$  y el recorrido de  $R^{-1}$ .
- 2.- Sea T la relación en el conjunto de los números reales  $\mathfrak{R}$  definida por  $x T y$  si, simultáneamente,  $x \in \{n, n + a\}$  e  $y \in \{n, n + 1\}$  para  $n \in \mathbb{Z}$  (Z, conjunto de los números enteros). Representar gráficamente la relación T.
- 3.- Considere la relación  $R = \{(1, 1); (2, 3); (3, 2)\}$  en  $X = \{1, 2, 3\}$ . Determine si se cumple o no que R es:
- a) reflexiva.
- b) simétrica.
- c) transitiva.
- 4.- Considere el conjunto  $N \times N$  (N es el conjunto de los números naturales), el conjunto de todos los pares ordenados de enteros positivos ( $Z^+$ ). Sea R la relación  $\cong$  en  $N \times N$  definida por  $(a, b) \cong (c, d)$ ; si y solo si  $ad = bc$ . Demostrar que R es una relación de equivalencia.
- 5.- Sea R la relación definida en  $Z^+$  como  $R = \{(x, y) / x, y \in Z^+, x + 2y = 12\}$
- a) Expresar R como un conjunto de pares ordenados.
- b) Hallar el dominio de R (dom R), el recorrido de R (rec R).
- c) Hallar  $R^{-1}$ .
- Respuestas: a)  $\{(10, 1); (8, 2); (6, 3); (4, 4); (2, 5)\}$ , b)  $\text{dom } R = \{10, 8, 6, 4, 2\}$ ,  $\text{rec } R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ; c)  $R^{-1} = \{(1, 10); (2, 8); (3, 6); (4, 4); (5, 2)\}$ .
- 6.- Considere la relación  $R = \{(4, 5); (1, 4); (4, 6); (7, 6); (3, 7)\}$  definida en  $Z^+$ .
- a) Hallar el dominio de R.
- b) Hallar el recorrido de R.
- c) Hallar  $R^{-1}$ , su dominio y su codominio.
- 7.- Sea la relación definida en  $Z^+ \times Z^+$ , definida como  $(a, b) \# (c, d)$ , si y sólo si  $a + d = b + c$ . Demuestre que # es una relación de equivalencia.
- 8.- Sea & la relación definida en  $\mathfrak{R}$  como  $x - y \in \mathbb{Z}$ . Demostrar que & es una relación de equivalencia.
- 9.- Sea R definida como  $(x, y) \in R$  si y sólo si  $y = 5 - 2x$ . Hallar:
- a) R en forma de par ordenado para  $A = \{x \in \mathbb{Z} / 0 < x < 10\}$  y  $B = \mathbb{Z}$ .
- b) El dominio de R.
- c) El recorrido de R.
- d)  $R^{-1}$  en forma de par ordenado.
- 10.- Confeccione un diagrama de Venn y un gráfico de coordenadas para la relación  $R = \{(1, 3); (1, 5); (1, 7); (1, 9)\}$ , definida en  $A \times A$  con  $A = \{x \in \mathbb{Z} / 0 < x < 10\}$ .
- 11.- Dados los conjuntos:  $A = \{2, 3, 5, 8, 9\}$  y  $B = \{3, 4, 6, 7, 9\}$  y la relación  $R = \{(x, y) / (x, y) \in A \times B, y = x + 1\}$
- a) Hacer un diagrama de Venn de la relación.
- b) Expresarla por extensión (en forma de pares ordenados).

- c) Determinar el dominio y el recorrido de R.
- 12.- Sea R una relación en  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  definida por “x e y son primos relativos”, esto es “el único divisor común de x e y es 1”.
- a) Escribir R como un conjunto de pares ordenados.  
 b) Representar R en un diagrama de coordenadas  $A \times A$ .
- 13.- Sea R una relación definida en los números naturales,  
 $R = \{(x, y) / 2x + 3y = 13; x, y \in \mathbb{N}\}$
- a) Escribir R como un conjunto de pares ordenados.  
 b) Encontrar el dominio y recorrido de R.
- 14.- Sea R una relación definida por:  
 $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (-2 \leq x < 2 \wedge -2 \leq y \leq 2) \vee (-5 < x < -1) \wedge (-1 < y \leq 3)\}$   
 Representar cada relación en un diagrama de coordenadas  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  y determine su dominio y recorrido.